

Corso di Metodi Matematici per la Finanza

Esercizi sulla decomposizione spettrale

Es. 1 Date le seguenti matrici, calcolarne autovalori ed autovettori e determinarne la loro forma diagonale.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es. 2 Date le seguenti matrici, calcolarne autovalori ed autovettori. Dopo aver verificato che non sono diagonalizzabili, determinarne la forma di Jordan o la rappresentazione complessa.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni

Es. 1

- *Matrice $\hat{A}$.* Autovalori reali e distinti: $\lambda = 0, 2$ con $m_a(0) = m_a(2) = 1$; possibili autovettori: $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $m_g(0) = 1$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $m_g(2) = 1$, pertanto $\hat{A}$ è diagonalizzabile. Matrice di trasformazione $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; forma diagonale $\hat{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Matrice $\hat{B}$.* Autovalori reali e coincidenti: $\lambda = 1, 2$ con $m_a(1) = 1$ e $m_a(2) = 1$; possibili autovettori: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $m_g(0) = 1$ e $\mathbf{v}_{2_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_{2_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $m_g(2) = 2$, pertanto $\hat{B}$ è diagonalizzabile. Matrice di trasformazione $\hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; forma diagonale

$$\hat{B}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es. 2

- *Matrice $\hat{C}$.* Autovalori reali e coincidenti: $\lambda = -1$; possibile autovettore: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $m_a(-1) = 2$; $m_a(-1) = 2 \neq m_g(-1) = 1$, pertanto $\hat{C}$ non è diagonalizzabile; possibile pseudoautovettore: $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; matrice di trasformazione $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$; forma di Jordan: $\hat{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Matrice $\hat{D}$.* Autovalori complessi e coniugati: $\lambda = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$. Consideriamo l'autovalore col segno positivo e calcoliamo un possibile autovettore. Automaticamente conosciamo anche l'altro che è il complesso coniugato. Otteniamo

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_a} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_b}.$$

Matrice di trasformazione: $\hat{U} = (\mathbf{w}_a \ \mathbf{w}_b) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Forma complessa: $\hat{C} = \begin{pmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$

- *Matrice $\hat{E}$.* Tre autovalori reali e coincidenti: $\lambda = 2$ con $m_a(2) = 3$; possibile autovettore: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $m_a(2) = 3 \neq m_g(2) = 1$, pertanto $\hat{F}$ non è diagonalizzabile; possibili pseudoautovettori:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \text{ matrice di trasformazione } \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}; \text{ forma di}$$

Jordan: $\hat{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

- *Matrice $\hat{F}$.* Un autovalore reale: $\lambda = -1$ e due complessi coniugati: $\lambda = \pm i$; possibili autovettori: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, relativamente all'autovalore complesso

col segno positivo. Matrice di trasformazione $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Forma complessa: $\hat{J} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$