Corso di Metodi Matematici per la Finanza

Esercizi sui vettori e gli spazi vettoriali

Es. 1 Determinare le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} .$$

Dimostrare che l'insieme di tutte le soluzioni è un sottospazio vettoriale e trovarne una base.

Es. 2 Determinare al variare di a le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} .$$

Es. 3 Determinare, al variare di a, nucleo e immagine della seguente matrice:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es. 4 Sia $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e sia $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ l'operatore lineare di simmetria rispetto all'asse delle y:

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} .$$

Determinare la rappresentazione dell'operatore ϕ rispetto alla base canonica, e rispetto alla base $\mathbb{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, dove $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

Es. 5 Sia $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e siano $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e $\mathbb{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ due basi di $\mathbb{V}$ con $\mathbb{E}$ base canonica, e $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Siano $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare la rappresentazione di $\mathbf{v}$ e $\hat{A}$ rispetto alla base $\mathbb{F}$.