

## Esercizi sul calcolo matriciale ed i sistemi lineari

Corso di Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie

Prof. Fausto Gozzi

**Es. 1** Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare ognuna delle seguenti matrici, se definita:

$$A + C; \quad A - B; \quad B^t; \quad B * C; \quad A * B.$$

- Verificare che  $(B * C)^t = C^t * B^t$ ;
- Calcolare  $B * (A + C)$ .
- Sia

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che  $B * D \neq D * B$ .

**Es. 2** Date le seguenti coppie di matrici, calcolarne il determinante.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare inoltre la matrice prodotto ed il suo determinante.

$$[(1) = (3, -1, -3), \quad (2) = (0, -1, 0), \quad (3) = (1, 1, 1)].$$

**Es. 3** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[\det(\hat{A}) = 0, \quad \det(\hat{B}) = 2, \quad \det(\hat{C}) = 0].$$

**Es. 4** Dopo aver verificato che la seguente matrice è invertibile calcolarne l'inversa:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left[ \det \hat{A} = 2 \quad \hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

**Es. 5** Data la seguente matrice determinare i valori di  $h$  per cui è invertibile, e ricavare  $A^{-1}$ :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \left[ \det \hat{A} = -h^2 \text{ se } h \neq 0 \rightarrow \hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & -1 & 0 \\ 1 & 2/h & -3 & -2/h \\ 0 & 0 & 0 & 1/h \end{pmatrix} \right]$$

**Es. 6** Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$(1) \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad [x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1]$$

$$(2) \begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad [x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1/2]$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad [x_1 = \frac{x_3+4}{3}, x_2 = \frac{2x_3-1}{3}, x_3 = x_3]$$

**Es. 7** Dato il sistema di tre equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ ax_1 = 2 \end{cases},$$

determinare quel valore di  $a$  per cui il sistema ammette soluzione. Trovare la soluzione.

$$[a = 2 \rightarrow (x_1 = 1, x_2 = 0)]$$

**Es. 8** Calcolare il determinante delle matrici  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Inoltre, trovare quei valori di  $a$  per cui le matrici  $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$ ,  $\hat{D} = \hat{A} + \hat{B}$ , abbiano determinante nullo.

$$[\det(\hat{A}) = a - 2, \det(\hat{B}) = -a \rightarrow \det(\hat{C}) = 0 \text{ se } a = 0, 2, \quad \det(\hat{D}) = 0 \quad \forall a]$$

**Es. 9** Trovare quel valore di  $a$  per cui il seguente sistema **non ammette** soluzione

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

Giustificare la risposta.

$$[a = \frac{1}{2}]$$

**Es. 10** Dato il sistema lineare  $\hat{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , ed  $\mathbf{x}$  vettore delle incognite, dire per quali dei seguenti  $\mathbf{b}$  il sistema ammette soluzione:

$$1) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giustificare la risposta.

$$[\mathbf{b} = 1), 3)]$$