

Corso di Metodi Matematici per la Finanza

Esercizi sui numeri complessi

1. Semplificare le seguenti espressioni:

$$a) \frac{1+i}{i(2+3i)}, \quad b) i^5 - \frac{1}{i^3}, \quad c) \frac{i(i-1)}{(i+1)^2}, \quad d) \frac{(1+i)^3}{1-i}.$$

2. Fattorizzare completamente i polinomi:

$$a) z^2 - 4z + 5 = 0, \quad b) z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad c) z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8 = 0, \quad d) z^3 - z^2 + 2 = 0.$$

3. Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti numeri complessi, ricavandone il modulo e l'argomento. Scrivere la loro rappresentazione esponenziale:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = -2 + 2i, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = \sqrt{3} + i.$$

Per tutti e tre i numeri complessi determinare

$$-z, \quad \bar{z}, \quad iz, \quad z^2$$

e disegnarli sul piano di Gauss.

4. Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano complesso:

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) > 0\} & \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \text{ e } |z-i| > 1\} \\ \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 2\operatorname{Re}(z)\} & \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

5. Determinare tutte le possibili soluzioni delle equazioni:

$$a) z^2 = i\bar{z}, \quad b) (z+i)\operatorname{Re} z = \bar{z}, \quad c) z + i\bar{z} = \frac{i}{z}, \quad d) \frac{1}{\bar{z}} + 1 = \frac{2}{z}.$$

6. Determinare una coppia di numeri complessi w e z in modo che le seguenti equazioni siano soddisfatte:

$$\begin{aligned} a) 2w - iz &= 0 & b) iw - (1+i)z &= 0 & c) \frac{w}{1-i} - (2-i)z &= 0 \\ d) \frac{iw}{1+i} - \frac{z}{1-i} &= 0 & e) \frac{2(1+i)w}{i} - \frac{iz}{i-1} &= 0 & f) \left(\frac{1+i}{1-i} - 1 \right) z - \frac{iw}{1-2i} &= 0. \end{aligned}$$

Soluzione esercizi blocco 1

$$[1a] -\frac{1+5i}{13} \quad [1b] 0 \quad [1c] \frac{-1+i}{2} \quad [1d] -2$$

Soluzione esercizi blocco 2

$$\begin{aligned} [2a] \quad z_{1,2} &= 2 \pm i, \quad P_2(z) = (z-2-i)(z-2+i) \\ [2b] \quad z_{1,2,3,4} &= \pm 1, \pm i\sqrt{2}, \quad P_4(z) = (z-1)(z+1)(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2}) \\ [2c] \quad z_{1,2,3,4} &= 1, -2, \pm 2i, \quad P_4(z) = (z-1)(z+2)(z-2i)(z+2i) \\ [2d] \quad z_{1,2,3} &= -1, 1 \pm i, \quad P_3(z) = (z+1)(z-1-i)(z-1+i) \end{aligned}$$

Soluzione esercizi blocco 3

$$\begin{aligned} [3a] \quad |z_1| &= 1, \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \\ [3b] \quad |z_2| &= 2\sqrt{2}, \quad \arg(z_1) = \frac{3}{4}\pi \\ [3c] \quad |z_3| &= 1, \quad \arg(z_2) = \frac{3}{2}\pi \\ [3d] \quad |z_4| &= 2, \quad \arg(z_3) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Soluzione esercizi blocco 5

$$\begin{aligned} [5a] \quad z &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z = 0, \quad z = -i \quad [5b] \quad z = 1 - \frac{i}{2}, \quad z = 0 \\ [5c] \quad z &= \pm \frac{1}{2}(1+i) \quad [5d] \quad z = 1 \end{aligned}$$