Università LUISS Guido Carli, A.A. 2010-2011 (II semestre)

Metodi Matematici per la Finanza

Dott. Davide Vergni

Operatori lineari su spazi vettoriali

Indice

1 Operatori lineari su spazi vettoriali **5**

1.0.1 Obiettivi principali del capitolo 5

1.1 Operatori lineari su spazi vettoriali 5

1.1.1 Trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ 6

1.1.2 Rappresentazione di operatori 8

1.1.3 Immagine e nucleo di una trasformazione 10

1.1.4 Isomorfismi ed endomorfismi 12

1.2 Il teorema di Rouché-Capelli 14

1.2.1 Il caso dei sistemi omogenei 15

1.3 Cambiamenti di base 16

1.3.1 Cambiamento di base 16

1.3.2 Cambiamento di rappresentazione per i vettori 16

1.3.3 Cambiamento di rappresentazione per gli operatori 17

Capitolo 1

Operatori lineari su spazi vettoriali

1.0.1 Obiettivi principali del capitolo

Dopo aver introdotto gli spazi vettoriali (e i relativi concetti di combinazione lineare, indipendenza lineare, base di uno spazio) e l'algebra delle matrici, vedremo in questo capitolo come questi argomenti si combinino per generare la teoria degli operatori lineari su spazi vettoriali.

1.1 Operatori lineari su spazi vettoriali

Finora abbiamo definito il concetto di spazio vettoriale e le operazioni elementari di combinazione lineare possibili su di esso. Il prossimo passo consiste nel costruire delle applicazioni, ossia delle funzioni vere e proprie, che trasformano gli elementi dello spazio vettoriale.
Visto che il nostro contesto operativo è l'algebra lineare, le funzioni a cui siamo interessati sono le sole funzioni (o applicazioni) lineari.

Definizione 1.1.1. *Siano* $\mathbb{U}$ *e* $\mathbb{V}$ *due spazi vettoriali e sia* ϕ *un'applicazione che ha per dominio* $\mathbb{U}$ *e per condominio* $\mathbb{V}$

$$\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$$

Diremo che ϕ *è un'applicazione lineare (o anche* **operatore lineare**, *o* **trasformazione lineare**) *se dati* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si ha*

1) $\phi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \phi(\mathbf{u}_1) + \phi(\mathbf{u}_2)$;

2) $\phi(\alpha\mathbf{u}_1) = \alpha\phi(\mathbf{u}_1)$.

È possibile riassumere le due proprietà che definiscono la linearità di un operatore nell'unica che riguarda la combinazione lineare $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$:

$$\phi(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \alpha\phi(\mathbf{u}_1) + \beta\phi(\mathbf{u}_2)\,.$$

Esempio 1.1.2. *Sia* $\mathbb{U} \equiv \mathbb{R}^2$ *e definiamo* ϕ *come l'operatore* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *che scambia le componenti di ogni vettore:*

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} .$$

Dimostriamo che ϕ *è un operatore lineare: dati* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \phi \left(\alpha \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} \alpha u_x + \beta v_x \\ \alpha u_y + \beta v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_y + \beta v_y \\ \alpha u_x + \beta v_x \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} u_y \\ u_x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$$

L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine dimostra la linearità dell'operatore di scambio coordinate.

Esempio 1.1.3. *Sia* $\mathbb{U}$ *lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari delle funzioni trigonometriche seno e coseno:* $\mathbb{U} \equiv Span(\cos x, \sin x)$. *È semplice dimostrare che sia l'operazione di integrazione* (S) *che l'operazione di derivazione* (D) *sono delle applicazioni lineari da* $\mathbb{U}$ *in* $\mathbb{U}$. *Prima di tutto bisogna dimostrare che* S *e* D *applicano da* $\mathbb{U}$ *in* $\mathbb{U}$. *Ma questa è una proprietà nota delle operazioni di integrazione e derivazione applicate al seno e al coseno. Quindi bisogna dimostrarne la linearità. Ma una delle proprietà di base delle operazioni di integrazione e di derivazione delle funzioni continue è proprio la linearità. Considerando per esempio la derivata si ha* $D(af(x) + bg(x)) = aD(f(x)) + bD(g(x))$. *Ma se vale per due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *generiche, allora varrà anche per gli elementi di* $\mathbb{U}$.

Lo studio degli operatori lineari sugli spazi vettoriali riguarda solo una piccola parte delle possibili funzioni che possiamo definire sugli spazi vettoriali, ma questa parte è fondamentale per tutta una serie di possibili applicazioni sia teoriche che pratiche. Come principio guida generale basti pensare che quando nello studio di un sistema questo risponde a diverse cause con la somma degli effetti che provocherebbe ogni singola causa, allora il sistema si comporta in maniera lineare. Un esempio economico potrebbe essere il caso di un sistema di produzione industriale. Se diminuisce il costo della manodopera e nel contempo diminuisce il costo delle materie prime, è ragionevole aspettarsi che il ricavo aumenti proporzionalmente ad entrambe le cause.

1.1.1 Trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$

È semplice mostrare come data una matrice qualsiasi, $\hat{A} \in \mathcal{M}(n, m)$, essa determini una trasformazione lineare dallo spazio $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$ allo spazio $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Infatti se definiamo l'applicazione $\phi_{\hat{A}}(\mathbf{u}) = \hat{A}\mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ (l'unica possibilità perché un vettore sia conformabile con una matrice $\hat{A} \in \mathcal{M}(n, m)$) allora $\phi_{\hat{A}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ per la definizione di prodotto righe per colonne. Resta da dimostrare la linearità dell'applicazione. Ma, usando la proprietá distributiva del prodotto di matrici rispetto alla somma e la proprietà commutativa del prodotto per scalare otteniamo la dimostrazione della linearità dell'applicazione: dati $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\phi_{\hat{A}}(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \hat{A}(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \hat{A}(\alpha\mathbf{u}_1) + \hat{A}(\beta\mathbf{u}_2) =$$

$$= \alpha\hat{A}\mathbf{u}_1 + \beta\hat{A}\mathbf{u}_2 = \alpha\phi_{\hat{A}}(\mathbf{u}_1) + \beta\phi_{\hat{A}}(\mathbf{u}_2)\,.$$

Quindi, ogni matrice $\hat{A} \in \mathcal{M}(n,m)$ determina un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Una domanda che sorge naturalmente è: esistono operatori lineari $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ che non sono rappresentabili attraverso matrici? La risposta, negativa, si trova nel teorema di rappresentazione che verrà dimostrato nel prossimo capitolo e che generalizza la questione a operatori lineari qualsiasi su spazi vettoriali astratti.

Esempio 1.1.4. *Proviamo a determinare la matrice che rappresenta l'operatore di inversione di coordinate $\phi_I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:*

$$\phi_I(\mathbf{u}) = \phi_I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\,.$$

Vediamo come agisce l'operatore ϕ_I sugli elementi della base canonica, $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, avendo rappresentato l'operatore come una matrice $\hat{A}_I \in \mathcal{M}(2\times 2)$ con $\hat{A}_I = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\phi_I(\mathbf{e}_1) = \hat{A}_I\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_I(\mathbf{e}_2) = \hat{A}_I\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per risolvere tali equazioni bisogna risolvere due semplicissimi sistemi di equazioni che determinano gli elementi di $\hat{A}_I$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\hat{A}_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textit{Infatti} \ \ \hat{A}_I\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

È fondamentale notare come le colonne di $\hat{A}_I$ siano formate dai vettori risultanti dall'applicazione di ϕ_I sugli elementi di base $\mathbf{e}_i$. Vedremo nel prossimo paragrafo come questa costruzione sia del tutto generale, e come l'azione dell'operatore sugli elementi di base determini la rappresentazione matriciale dell'operatore anche nel caso di operatori lineari qualsiasi su spazi vettoriali astratti.

1.1.2 Rappresentazione di operatori

In linea generale ogni operatore lineare si comporta in modo specifico, ossia avrà la sua modalità caratteristica di azione sugli elementi dello spazio. Abbiamo già visto come per ogni spazio vettoriale la definizione di una base implichi l'introduzione di una corrispondenza biunivoca tra vettori dello spazio e vettori di $\mathbb{R}^n$, se la dimensione dello spazio vettoriale è n. In questo paragrafo dimostreremo come la proprietà di linearità per un operatore definito su uno spazio vettoriale fà si che questi abbia sempre una rappresentazione matriciale, e che quindi ogni operatore lineare può essere sempre rappresentato attraverso l'azione di una matrice su un vettore di $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1.1.5. *Siano $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ due spazi vettoriali di dimensione m ed n, rispettivamente, e sia ϕ un'applicazione lineare che ha per dominio $\mathbb{U}$ e per condominio $\mathbb{V}$: $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$. Fissata una base $\mathbb{E} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m)$ in $\mathbb{U}$ e una base $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n)$ in $\mathbb{V}$ esiste un'unica matrice $\hat{A}_\phi \in \mathcal{M}(n, m)$ che rappresenta la trasformazione ϕ. Ossia se $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ sono tali che $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ allora*

$$\mathbf{y}_\mathbb{F} = \hat{A}_\phi \mathbf{x}_\mathbb{E}$$

dove $\mathbf{x}_\mathbb{E} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}_\mathbb{F} \in \mathbb{R}^n$ rappresentano i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ rispetto alle basi $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m = \mathbb{E}\mathbf{x}_\mathbb{E} \\ \mathbf{y} &= y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n = \mathbb{F}\mathbf{y}_\mathbb{F} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbb{E} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m)$ una base per $\mathbb{U}$ e $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n)$ una base per $\mathbb{V}$. Calcoliamo l'azione di ϕ sui vettori di base di $\mathbb{U}$ e rappresentiamo i vettori risultanti ($\phi(\mathbf{u}_i) \in \mathbb{V}$) nella base $\mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n a_{j1}\mathbf{v}_j = \mathbb{F}\mathbf{a}_{1_\mathbb{F}} \\ \phi(\mathbf{u}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n a_{j2}\mathbf{v}_j = \mathbb{F}\mathbf{a}_{2_\mathbb{F}} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \phi(\mathbf{u}_m) = a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n a_{jm}\mathbf{v}_j = \mathbb{F}\mathbf{a}_{m_\mathbb{F}} \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{a}_{i_\mathbb{F}}$ sono i vettori di $\mathbb{R}^n$ che contengono le coordinate del vettore $\phi(\mathbf{u}_1) \in \mathbb{V}$ rispetto alla base $\mathbb{F}$. Costruiamo quindi la matrice $\hat{A}_\phi \in \mathcal{M}(n, m)$ ponendo

$$\{\hat{A}_\phi\}_{ij} = a_{ij} \quad \text{ovvero} \quad \hat{A}_\phi = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1_\mathbb{F}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{2_\mathbb{F}} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{m_\mathbb{F}} \end{pmatrix} \right)$$

Osserviamo, come già fatto notare alla fine della sezione precedente, che le colonne di $\hat{A}_\phi$ sono formate dai vettori risultanti dall'applicazione di ϕ sugli elementi di base

$\mathbf{u}_i$.
Ora, dato il generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ scriviamo

$$\phi(\mathbf{u}) = \phi(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\mathbf{u}_i\right)$$

sfruttando la linearità dell'operatore ϕ

$$\phi(\mathbf{u}) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i\phi(\mathbf{u}_i)$$

infine utilizzando le equazioni (1.1)

$$\phi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{m} x_i\phi(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i\right)\mathbf{v}_j\,.$$

Ora, tra parentesi nell'ultima equazione abbiamo il prodotto righe per colonne tra la matrice $\hat{A}_\phi$ e i valori x_i che sono le componenti del vettore $\mathbf{x}_{\mathbb{E}} \in \mathbb{R}^m$ rappresentazione di $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ rispetto alla base $\mathbb{E}$. Chiamando $\mathbf{y}_{\mathbb{F}} \in \mathbb{R}^n$ la rappresentazione di $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ rispetto alla base $\mathbb{F}$, allora abbiamo:

$$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) \quad \to \quad \mathbb{F}\mathbf{y}_{\mathbb{F}} = \phi(\mathbb{E}\mathbf{x}_{\mathbb{E}}) = \mathbb{F}\hat{A}_\phi\mathbf{x}_{\mathbb{E}} \quad \to$$

$$\mathbf{y}_{\mathbb{F}} = \hat{A}_\phi\mathbf{x}_{\mathbb{E}}$$

che lega la rappresentazione di $\mathbf{y}$ nella base $\mathbb{F}$ alla rappresentazione di $\mathbf{x}$ nella base $\mathbb{E}$ attraverso l'operatore $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ rappresentato dalla matrice $\hat{A}_\phi$ □

La dimostrazione di questo teorema è costruttiva, nel senso che costruisce letteralmente la matrice rappresentazione dell'operatore come applicazione dell'operatore sui vettori di base. In questo teorema c'è il motivo profondo del perché il prodotto righe per colonne è utilizzato come prodotto tra matrici: questo è l'unico modo di definire un prodotto in modo tale che l'azione di operatori lineari su spazi vettoriali possa essere rappresentata, una volta definita una base, come l'applicazione (il prodotto) di una matrice, che rappresenta l'operatore, su un vettore di $\mathbb{R}^m$, che rappresenta il vettore astratto.

Esempio 1.1.6. *Vediamo il caso dell'operatore di derivata sullo spazio vettoriale* $\mathbb{U} \equiv Span(\cos x, \sin x)$ *delle combinazioni lineari delle funzioni trigonometriche seno e coseno. Scegliamo come vettori di base* $\mathbb{E} = (\cos x, \sin x)$. *Prima di tutto calcoliamo l'azione dell'operatore sui vettori di base:*

$$D(\cos x) = -\sin x = \mathbb{E}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad e \quad D(\sin x) = \cos x = \mathbb{E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,.$$

Dalla dimostrazione del teorema di rappresentazione si vede come la matrice associata all'operatore si costruisce a partire dalle componenti del risultato dell'applicazione dell'operatore sui vettori di base:

$$\hat{A}_D = \left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\,.$$

Effettuiamo una verifica del risultato ottenuto:

$$D(\sin x - 2\cos x) = \cos x + 2\sin x\,.$$

Fissata la base $\mathbb{E} = (\cos x, \sin x)$ *rappresentiamo il vettore* $\mathbf{u} = \sin x - 2\cos x$ *nella base* $\mathbb{E}$*:* $\mathbf{u} = \mathbb{E}\mathbf{u}_{\mathbb{E}} = \mathbb{E}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. *Quindi* $D(\sin x - 2\cos x) = \mathbb{E}\hat{A}_D\mathbf{u}_E = \mathbb{E}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \mathbb{E}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, *ma* $\mathbb{E}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \cos x + 2\sin x$.

1.1.3 Immagine e nucleo di una trasformazione

Una prima caratterizzazione per le funzioni reali è la definizione di dominio e di codominio. Nel caso degli operatori lineari (così come nel caso delle funzioni lineari $f(x) = ax$) il dominio è sempre tutto lo spazio vettoriale di partenza, mentre il codominio può variare a seconda della struttura dell'applicazione.

Definizione 1.1.7. *Data un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *definiamo* **immagine** *(o codominio) di* ϕ *rispetto a* $\mathbb{U}$ *l'insieme:*

$$Im(\phi) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid \exists\, \mathbf{u} \in \mathbb{U} \text{ con } \mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})\}\,.$$

Quindi, $\mathrm{Im}(\phi)$ è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{V}$ che sono l'immagine attraverso ϕ di qualche vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$.

Un'altra nozione, presente anche nel caso delle funzioni reali ma che per gli operatori lineari assume un ruolo centrale è il concetto di nucleo:

Definizione 1.1.8. *Data un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *definiamo* **nucleo** *di* ϕ *l'insieme:*

$$Ker(\phi) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U} \mid \phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}\,.$$

Quindi il nucleo di un operatore è l'insieme degli zeri dell'applicazione, ossia l'insieme dei vettori di $\mathbb{U}$ che vengono annullati dalla trasformazione ϕ (è equivalente agli zeri di una funzione, ossia quei valori del dominio che annullano il valore della funzione). L'immagine è un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ e il nucleo è un sottoinsieme di $\mathbb{U}$. Il prossimo teorema ci dirà qualcosa in più circa le caratteristiche di questi sottoinsiemi:

Theorem 1.1.9. *Data un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *l'immagine e il nucleo di* ϕ *sono sottospazi vettoriali di* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{U}$*, rispettivamente.*

Dimostrazione. Per dimostrare che un certo sottoinsieme di uno spazio vettoriale è anche un sottospazio vettoriale, bisogna dimostrarne la chiusura rispetto alle combinazioni lineari. Dimostriamo prima che $\mathrm{Im}(\phi)$ è un sottospazio vettoriale. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}(\phi)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora dobbiamo dimostrare che anche $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}(\phi)$. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono nell'immagine di ϕ allora esisteranno almeno due vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}$ tali che

$$\mathbf{v}_1 = \phi(\mathbf{u}_1) \;\text{ e }\; \mathbf{v}_2 = \phi(\mathbf{u}_2).$$

Ma, per le proprietà di ϕ

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \alpha\phi(\mathbf{u}_1) + \beta\phi(\mathbf{u}_2) = \phi(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2)\,.$$

Allora anche $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}(\phi)$ visto che è il trasformato di un vettore di $\mathbb{U}$, $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}$.

Una dimostrazione assolutamente analoga viene sviluppata per dimostrare che il nucleo di ϕ è un sottospazio vettoriale. Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$ allora

$$\phi(\mathbf{u}_1) = 0 \;\text{ e }\; \phi(\mathbf{u}_2) = 0\,.$$

Ma, per le proprietà di ϕ

$$\phi(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \alpha\phi(\mathbf{u}_1) + \beta\phi(\mathbf{u}_2) = 0$$

e quindi $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$ □

A differenza di quello che accade per le funzioni reali, nelle quali il codominio e il nucleo potevano essere intervalli numerici o punti distinti, per gli operatori lineari su spazi vettoriali il codominio e il nucleo sono sempre dei sottospazi vettoriali. In alcuni casi (specialmente per quanto riguarda il nucleo) la dimensione di tali sottospazi potrebbe ridursi a zero (contenendo, quindi, il solo vettore nullo), però in generale si tratta di sottospazi vettoriali propri con una loro dimensione non nulla. Vale il seguente importante teorema:

Theorem 1.1.10. *Data un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ con $dim(\mathbb{U}) = m$ e $dim(\mathbb{V}) = n$, vale la seguente relazione:*

$$dim(Ker(\phi)) + dim(Im(\phi)) = m\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathbb{U}$ abbia dimensione n_1. Definiamo una base in $\mathbb{U}$ per il nucleo, $\mathbb{E}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{n_1})$, e scegliamo altri $n_2 = m - n_1$ vettori di $\mathbb{U}$ in modo da costruire una base per $\mathbb{U}$, $\mathbb{E} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_{n_2})$. Ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ può essere scritto come

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_{n_1}\mathbf{u}_{n_1} + \beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \beta_{n_2}\mathbf{w}_{n_2}\,.$$

Perché un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ appartenga all'immagine di ϕ, $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(\phi)$, deve esistere $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ tale che $\mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})$, e quindi

$$\mathbf{v} = \phi(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_{n_1}\mathbf{u}_{n_1} + \beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \beta_{n_2}\mathbf{w}_{n_2})\,.$$

Visto che ϕ è un operatore lineare e che $\mathbf{u}_i \in$Ker(ϕ) si ha

$$\mathbf{v} = \beta_1\phi(\mathbf{w}_1) + \beta_2\phi(\mathbf{w}_2) + \cdots + \beta_{n_2}\phi(\mathbf{w}_{n_2}) = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_{n_2}\mathbf{v}_{n_2}\,.$$

Per cui i vettori $\mathbf{v}_i = \phi(\mathbf{w}_i) \in \mathrm{Im}(\phi)$ costituiscono un'insieme di generatori per $\mathrm{Im}(\phi)$. Se dimostriamo che i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i = 1 \cdots n_2$ sono linearmente indipendenti allora abbiamo dimostrato che dim(Im(ϕ)) $= n_2$ e quindi dim(Ker(ϕ))+dim(Im(ϕ)) $= n_1 + n_2 = m$. Se i vettori $\mathbf{v}_i = \phi(\mathbf{w}_i)$ fossero linearmente dipendenti si avrebbe $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n_2}\mathbf{v}_{n_2} = 0$ per una opportuna scelta dei coefficienti c_i. Ma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n_2}\mathbf{v}_{n_2} = c_1\phi(\mathbf{w}_1) + c_2\phi(\mathbf{w}_2) + \cdots + c_{n_2}\phi(\mathbf{w}_{n_2}) =$$

$$= \phi(c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{n_2}\mathbf{w}_{n_2}) = 0$$

e questo significa che il vettore $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{n_2}\mathbf{w}_{n_2} \in \mathrm{Ker}(\phi)$ e quindi potrebbe essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_i$ con $i = 1 \cdots n_1$ base di Ker(ϕ). Ma questo è un assurdo perché i vettori $\mathbf{w}_i$ sono stati scelti come linearmente indipendenti rispetto ai vettori del nucleo. □

In sostanza questo teorema ci dice come vengono trasformate attraverso l'operatore ϕ tutte le dimensioni di $\mathbb{U}$: una parte serviranno per creare i generatori dell'immagine, mentre gli altri andranno nel vettore nullo.
Un altro risultato importante lega l'immagine di un operatore alla matrice, $\hat{A}_\phi \in \mathcal{M}(n,m)$ che lo rappresenta rispetto alle basi fissate. Abbiamo visto come la dimensione di Im(ϕ) è pari al numero di generatori $\phi(\mathbf{w}_i)$. Quindi è ragionevole attendersi che il rango di $\hat{A}_\phi$ (visto come il numero massimo di vettori linearmente indipendenti nella matrice) sia pari al numero di generatori e quindi alla dimensione di Im(ϕ):

Theorem 1.1.11. *Sia $\mathcal{A}_\phi \in \mathcal{M}(n,m)$ la matrice che rappresenta l'operatore $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ una volta fissate le basi $\mathbb{E}$ per $\mathbb{U}$ e $\mathbb{F}$ per $\mathbb{V}$. Allora si ha*

$$\mathit{dim}(\mathit{Im}(\phi)) = \mathit{Rg}(\hat{A}_\phi)$$

Dimostrazione. Se la base di $\mathbb{U}$ è costituita da $\mathbb{E} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_{n_2})$ dove $\mathbf{u}_i \in \mathrm{Ker}(\phi)$, allora abbiamo già visto nella dimostrazione del teorema precedente che $\phi(\mathbf{w}_i)$ è l'insieme di generatori indipendenti che formano una base di Im(ϕ). Ma, per il teorema di rappresentazione, le coordinate di $\phi(\mathbf{w}_i)$ rispetto alla base $\mathbb{F}$ sono le colonne della matrice $\hat{A}_\phi$, e visto che gli n_2 vettori $\phi(\mathbf{w}_i)$ sono linearmente indipendenti, tali saranno anche le n_2 colonne della matrice $\hat{A}_\phi$. Queste colonne saranno quelle che determinano il rango, in quanto le altre colonne saranno composte da soli zero, visto che $\phi(\mathbf{u}_i) = 0$. Quindi $\mathrm{Rg}(\hat{A}_\phi) = n_2 = \mathrm{dim}(\mathrm{Im}(\phi))$. Visto che il rango di una matrice che rappresenta un operatore non può dipendere dalla base scelta, allora questo risultato è generale. □

1.1.4 Isomorfismi ed endomorfismi

Diamo in questa sottosezione alcune definizioni e dimostrazioni che ci torneranno utili nel seguito.

Definizione 1.1.12. *Sia $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale $\mathbb{U}$ allo spazio vettoriale $\mathbb{V}$. Allora*

- *ϕ è* **iniettiva** *se manda punti diversi di $\mathbb{U}$ in punti diversi di $\mathbb{V}$:*
  $\forall \mathbf{v} \in \mathit{Im}(\phi)\ \exists!\ \mathbf{u} \in \mathbb{U} : \mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})$.

- ϕ *è* **suriettiva** *se la sua immagine è tutto* $\mathbb{V}$*:* $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}\ \exists\, \mathbf{u} \in \mathbb{U} : \mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})$.
- ϕ *è un* **isomorfismo** *(o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.*

È abbastanza semplice dimostrare che se un'applicazione ha il nucleo formato solo dal vettore nullo, allora è iniettiva:

Theorem 1.1.13. *Data un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *dallo spazio vettoriale* $\mathbb{U}$ *allo spazio vettoriale* $\mathbb{V}$*, allora* ϕ *è iniettiva se e solo se* $Ker(\phi) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Se ϕ è iniettiva allora per ogni $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}' \in \mathbb{U}$ tali che $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ si ha $\phi(\mathbf{u}) \neq \phi(\mathbf{u}')$. Ma questo implica che $\phi(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \phi(\mathbf{u}'') \neq \mathbf{0}$ e quindi che $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbf{0}$. Viceversa, se $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbf{0}$ non implicasse l'iniettività di ϕ si avrebbe che esistono due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}' \in \mathbb{U}$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ tali che $\phi(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}')$. Ma questo porterebbe a dire che $\phi(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \phi(\mathbf{u}'') = \mathbf{0}$ contro l'ipotesi. □

Un'altro importantissimo teorema riguarda le caratteristiche degli spazi che possono essere connessi da un isomorfismo

Theorem 1.1.14. *Se un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *dallo spazio vettoriale* $\mathbb{U}$ *allo spazio vettoriale* $\mathbb{V}$*, è un isomorfismo, allora necessariamente* $dim(\mathbb{U}) = dim(\mathbb{V})$.

Dimostrazione. Se la ϕ è iniettiva, allora $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbf{0}$ e per il teorema della dimensione (teorema 1.1.10) $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathbb{U})$. Ma visto che ϕ è anche suriettiva, allora $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{V}$ e quindi $\dim(\mathbb{U}) = \dim(\mathbb{V})$. □

Una volta scelta una base per $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ e utilizzando gli argomenti appena esposti, è semplice intuire che

Proposizione 1.1.15. *Se un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *dallo spazio vettoriale* $\mathbb{U}$ *allo spazio vettoriale* $\mathbb{V}$*, è un isomorfismo, allora la matrice che la rappresenta sarà necessariamente non singolare, ossia a determinante diverso da zero.*

Finora abbiamo considerato operatori lineari che connettono spazi vettoriali diversi. Molto rilevanti per quello che ci concerne sono invece gli operatori per cui lo spazio vettoriale di partenza è identico allo spazio vettoriale di arrivo:

Definizione 1.1.16. *Un'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *viene detta* **endomorfismo**.

Gli endomorfismi sono importanti nello sviluppo della teoria perché sono degli operatori che possono rappresentare la dinamica di uno stato. Se lo "stato" di un sistema è rappresentato da un vettore di uno spazio vettoriale allora ci aspettiamo che la sua dinamica, ossia come lo stato evolve nel tempo, modifichi lo stato ma non lo spazio di appartenenza. Quindi, possiamo immaginare che la trasformazione di uno stato sia dovuta all'azione di un operatore che modifica solo lo stato, e perciò sia un endomorfismo.

Definizione 1.1.17. *Se un'endomorfismo* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *è anche un isomorfismo allora viene detto* **automorfismo**.

Theorem 1.1.18. *Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{U}$ e un endomorfismo $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *ϕ è un automorfismo;*
- *ϕ è iniettiva;*
- *ϕ è suriettiva;*
- *fissata una base su $\mathbb{U}$ la rappresentazione di ϕ rispetto alla base è non singolare.*

1.2 Il teorema di Rouché-Capelli

Come applicazione dei concetti sviluppati sugli operatori lineari tra spazi vettoriali, diamo una dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli per i sistemi rettangolari $n \times m$ di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} \tag{1.3}$$

con n equazioni in m incognite.
Se definiamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dove $\hat{A}$ è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{x}$ il vettore delle incognite e $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti, il sistema può essere scritto come

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Inoltre, definiamo la matrice completa del sistema $\hat{B}$ composta da tutti i coefficienti del sistema più i termini noti:

$$\hat{B} = (\hat{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Per quello che abbiamo visto degli operatori lineari possiamo interpretare il membro di sinistra del sistema $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ come l'applicazione di un operatore, $\phi_{\hat{A}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (rappresentato dalla matrice $\hat{A}$) sui vettori di $\mathbb{R}^m$, e l'uguaglianza implica la ricerca dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ che hanno come immagine il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, per cui il sistema avrà soluzione se $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\phi_{\hat{A}})$.

Theorem 1.2.1. *Dato il sistema lineare (1.3) siano $\hat{A}$ la matrice dei coefficienti e $\hat{B}$ la matrice completa. Allora il sistema ammette soluzioni se $Rg(\hat{A}) = Rg(\hat{B})$ e il numero di soluzioni sarà pari a $\infty^{m-Rg(\hat{A})}$.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{b}$ deve appartenere all'immagine di $\phi_{\hat{A}}$ allora deve essere linearmente dipendente dai generatori di $\mathrm{Im}(\phi_{\hat{A}})$. Visto che i generatori di $\mathrm{Im}(\phi_{\hat{A}})$ sono i vettori delle colonne di $\hat{A}$ se $\mathrm{Rg}(\hat{A}) = \mathrm{Rg}(\hat{B})$ allora $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\phi_{\hat{A}})$. Se invece $\mathrm{Rg}(\hat{A}) < \mathrm{Rg}(\hat{B})$ il vettore $\mathbf{b}$ è linearmente indipendente dai vettori di $\hat{A}$, perché l'aggiunta di una colonna alla matrice $\hat{A}$ può aumentarne il rango solo se la colonna in questione è linearmente indipendente dalle colonne già presenti, e quindi il sistema non avrà soluzione.
Per quanto riguarda il numero di soluzioni, se $\mathbf{x}_1$ è soluzione del sistema, allora $\forall \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\phi_{\hat{A}})$, anche $\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}$ sarà soluzione del sistema. Infatti

$$\hat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}) = \hat{A}\mathbf{x}_1 + \hat{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}\,.$$

Inoltre, se $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono due soluzioni distinte, allora definendo $\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ si ha

$$\hat{A}\mathbf{u} = \hat{A}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \hat{A}\mathbf{x}_2 - \hat{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\,,$$

e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \in \mathrm{Ker}(\phi_{\hat{A}})$. Per cui ogni soluzione del sistema può essere scritta come $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}$ dove $\mathbf{x}_1$ è una qualsiasi soluzione del sistema (detta anche **soluzione particolare**) e $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\phi_{\hat{A}})$. Quindi il numero di soluzioni sarà pari alla dimensione del $\mathrm{Ker}(\phi_{\hat{A}})$. Un teorema del capitolo precedente dice che $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = n_1 + n_2 = m$ e quindi $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = m - \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = m - \mathrm{Rg}(\hat{A})$. □

Questa dimostrazione è solo parzialmente costruttiva in quanto non ci dice come trovare la soluzione particolare, però ci dice che data quella soluzione, tutte le altre si ricavano sommando alla soluzione particolare i vettori del nucleo di $\phi_{\hat{A}}$.

1.2.1 Il caso dei sistemi omogenei

Un caso notevole che può capitare nella soluzione dei sistemi lineari è quello dei sistemi omogenei, nei quali non è presente il vettore dei termini noti, o, per meglio dire $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Sono quindi sistemi del tipo

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Più in generale, data un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, un'equazione del tipo

$$\phi(\mathbf{u}) = 0$$

si dice equazione omogenea. Per quello che abbiamo visto dal teorema di rappresentazione, ogni equazione omogenea può ricondursi alla soluzione di un sistema lineare omogeneo. La soluzione delle equazioni omogenee consiste nella ricerca di tutti quei vettori $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ che appartengono al nucleo di ϕ. Infatti, per definizione di nucleo di un operatore,

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff \phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Quindi, lo spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea (così come lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{U}$, e la ricerca di tutte le soluzioni consiste nel determinare una base per il nucleo di ϕ.
Particolarmente notevole è il caso di equazioni omogenee indotte da endomorfismi. In questo caso, una volta fissata una base $\mathbb{E}$ in $\mathbb{U}$, la matrice che rappresenta ϕ, $\hat{A}_\phi$, è una matrice quadrata. Per il teorema di Rouché-Capelli le soluzioni del sistema $\hat{A}_\phi \mathbf{x} = \mathbf{0}$ saranno la solo soluzione banale se $\det(\hat{A}_\phi) \neq 0$, mentre esisteranno soluzioni non banali solo se $\det(\hat{A}_\phi) = 0$.

1.3 Cambiamenti di base

Come l'assegnazione di una base in uno spazio vettoriale $\mathbb{U}$ determina una corrispondenza biunivoca tra i vettori dello spazio e i vettori di $\mathbb{R}^n$ (se $n = \dim(\mathbb{U})$) così viene determinata una corrispondenza biunivoca tra gli endomorfismi $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, e le matrici di $\mathcal{M}(n,n)$.

La rappresentazione di vettori e di operatori dipende crucialmente dalla scelta della base. In questo paragrafo ci occuperemo di studiare come cambia la rappresentazione se decidiamo di cambiare base di $\mathbb{U}$.

1.3.1 Cambiamento di base

Sia $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$ una base di $\mathbb{U}$, e sia $\mathbb{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n)$ una nuova base per $\mathbb{U}$ che possiamo esprimere in funzione dei vettori della vecchia base:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \mathbf{f}_1 & = & \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\mathbf{e}_n & = & \mathbb{E}\alpha_1 \\ \mathbf{f}_2 & = & \alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\mathbf{e}_n & = & \mathbb{E}\alpha_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{f}_n & = & \alpha_{1n}\mathbf{e}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{e}_n & = & \mathbb{E}\alpha_n \end{array} \right. , \tag{1.4}$$

dove α_i è il vettore che contiene le coordinate di $\mathbf{f}_i$ rispetto alla base $\mathbb{E}$. Definendo $\hat{U}$ la matrice che ha come i-esima colonna il vettore α_i,

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \alpha_m \end{pmatrix} \right)$$

ovvero $\{\hat{U}\}_{ij} = \alpha_{ij}$, diremo che $\hat{U}$ è la matrice del cambiamento di base e scriveremo

$$\mathbb{F} = \mathbb{E}\hat{U} \tag{1.5}$$

1.3.2 Cambiamento di rappresentazione per i vettori

Sotto la base $\mathbb{E}$ il generico vettore di $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ lo possiamo scrivere come $\mathbf{x} = \mathbb{E}\mathbf{x}_\mathbb{E}$ dove $\mathbf{x}_\mathbb{E} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle coordinate di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathbb{E}$. Ovviamente possiamo anche rappresentare $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathbb{F}$, scrivendo $\mathbf{x} = \mathbb{F}\mathbf{x}_\mathbb{F}$ con ovvio significato dei simboli. Quello che vogliamo determinare sono le regole di trasformazione di

$\mathbf{x}_{\mathbb{E}}$ in $\mathbf{x}_{\mathbb{F}}$. Una considerazione importante è che il vettore $\mathbf{x}$ è una fissata entità matematica indipendentemente da quale base si utilizza per la sua rappresentazione. Per cui

$$\mathbb{E}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \mathbb{F}\mathbf{x}_{\mathbb{F}}\,.$$

Sfruttando il legame tra le due basi rappresentato dall'equazione (1.5) possiamo scrivere

$$\mathbb{E}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \mathbb{F}\mathbf{x}_{\mathbb{F}} \;\;\rightarrow\;\; \mathbb{E}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \mathbb{E}\hat{U}\mathbf{x}_{\mathbb{F}}$$

dalla quale è possibile ottenere il legame tra $\mathbf{x}_{\mathbb{E}}$ e $\mathbf{x}_{\mathbb{F}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \hat{U}\mathbf{x}_{\mathbb{F}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} \end{cases} \tag{1.6}$$

1.3.3 Cambiamento di rappresentazione per gli operatori

Leggermente più complicato è determinare le regole di trasformazione della rappresentazione degli operatori lineri. Supponiamo che sotto la base $\mathbb{E}$ il generico operatore $\phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ si rappresenti con la matrice $\hat{A}_{\mathbb{E}}$. Questo significa che dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ tali che $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ allora

$$\mathbb{E}\mathbf{y}_{\mathbb{E}} = \mathbb{E}\hat{A}_{\mathbb{E}}\mathbf{x}_{\mathbb{E}}\,.$$

Analogamente, possiamo scrivere, rispetto alla base $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F}\mathbf{y}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}\hat{A}_{\mathbb{F}}\mathbf{x}_{\mathbb{F}}\,.$$

I termini di sinistra delle due precedenti uguaglianze rappresentano entrambe il vettore $\mathbf{y}$ e quindi possono essere uguagliate

$$\mathbb{E}\mathbf{y}_{\mathbb{E}} = \mathbb{F}\mathbf{y}_{\mathbb{F}} \;\;\rightarrow\;\; \mathbb{E}\hat{A}_{\mathbb{E}}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \mathbb{F}\hat{A}_{\mathbb{F}}\mathbf{x}_{\mathbb{F}}$$

Sfruttando prima l'equazione (1.5) e succesivamente l'equazione (1.6) si ha

$$\mathbb{E}\hat{A}_{\mathbb{E}}\mathbf{x}_{\mathbb{E}} = \mathbb{F}\hat{A}_{\mathbb{F}}\mathbf{x}_{\mathbb{F}} = \mathbb{E}\hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\mathbf{x}_{\mathbb{F}} = \mathbb{E}\hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}_{\mathbb{E}}$$

Infine, uguagliando il membro di sinistra e quello di destra della precedente equazione possiamo scrivere

$$\begin{cases} \hat{A}_{\mathbb{E}} = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1} \\ \hat{A}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U} \end{cases} \tag{1.7}$$