Università LUISS Guido Carli, A.A. 2010-2011 (II semestre)

# Metodi Matematici per la Finanza

**Dott. Davide Vergni**

## Equazioni differenziali ed alle differenze

# Indice

# Capitolo 1

# Sistemi di equazioni differenziali ed alle differenze lineari

### 1.0.1 Obiettivi principali del capitolo

Questo capitolo è dedicato alle dinamiche lineari su spazi vettoriali finito dimensionali. Verrà utilizzata tutta la teoria precedentemente sviluppata riguardo sia gli spazi vettoriali sia le equazioni alle differenze e differenziali.

## 1.1 Dinamiche lineari del primo ordine

Sfruttando il concetto di base, che permette di associare ad ogni elemento di un spazio vettoriale un vettore ($\in \mathbb{R}^n$) di coordinate, ed il teorema di rappresentazione, che permette di associare ad ogni operatore su spazi vettoriali una matrice ($\in \mathcal{M}(n,n)$), per studiare le dinamiche lineari (ancora una volta omogenee ed a coefficienti costanti) su spazi vettoriali

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \phi(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}'(t) = \phi(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{V} \ \text{ e } \ \phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}\,,$$

sarà sufficiente studiare tali dinamiche limitatamente al caso di $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$ e $\phi \equiv \hat{A} \in \mathcal{M}(n,n)$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ \hat{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,.$$

### 1.1.1 Sistemi di equazioni alle differenze lineari omogenee a coefficienti costanti

Le più semplici dinamiche lineari che si possono incontrare sono i sistemi di equazioni alle differenze lineari omogenee a coefficienti costanti

$$\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t\,, \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ è lo stato del sistema in funzione del tempo (variabile in modo discreto) ed $\hat{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ è l'operatore che determina la dinamica. Di questa equazione è semplice trovare la soluzione generale, effettuando esattamente gli stessi passaggi del caso unidimensionale: data $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ la condizione di partenza, chiamata anche in questo caso **condizione iniziale**, si ha che:

$$\mathbf{x}_1 = \hat{A}\mathbf{x}_0\,,\;\; \mathbf{x}_2 = \hat{A}\mathbf{x}_1 = \hat{A}^2\mathbf{x}_0\,,\;\; \mathbf{x}_3 = \hat{A}\mathbf{x}_2 = \hat{A}^3\mathbf{x}_0\,,\;\; \rightarrow$$

$$\mathbf{x}_t = \hat{A}^t\mathbf{x}_0\,, \tag{1.2}$$

è la soluzione generale dell'equazione (1.1). Bisogna anzitutto notare che la condizione iniziale deve essere messa necessariamente a destra dell'operatore $\hat{A}^t$ in modo da ottenere un vettore colonna dal prodotto vettoriale $\hat{A}^t\mathbf{x}_0$. Inoltre, un'altra differenza cruciale rispetto al caso unidimensionale, è che non è assolutamente banale calcolare $\hat{A}^t$, in quanto per matrici generiche effettuare il prodotto di $\hat{A}$ per $\hat{A}$ un numero $t$ di volte è un'operazione che nella maggior parte dei casi risulta proibitiva.

### 1.1.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

I più semplici sistemi di equazioni differenziali che si possono incontrare, e che saranno anche gli unici che tratteremo, sono del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)\,, \tag{1.3}$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ è lo stato del sistema in funzione del tempo (qui il tempo è una variabile continua) ed $\hat{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ è l'operatore che determina la dinamica. In questo caso la soluzione generale non è banale come nel caso precedente ed è necessario introdurre il concetto di esponenziale di matrice.

#### Esponenziale di matrice

Nel caso delle equazioni differenziali unidimensionali, $x' = ax$, si va alla ricerca di una funzione la cui derivata è proporzionale alla funzione stessa. L'unica funzione che verifica questa proprietà è l'esponenziale,

$$f(t) = e^{at} \quad \rightarrow \quad f'(t) = ae^{at}\,.$$

È possibile definire una funzione di matrice $\hat{F}(\hat{A}t)$ tale da verificare la proprietà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F}(\hat{A}t) = \hat{A}\hat{F}(\hat{A}t)\,?$$

Cominciamo col dire che una funzione di matrice è un'applicazione $F : \mathcal{M}(n,n) \rightarrow \mathcal{M}(n,n)$ che associa ad ogni matrice un'altra matrice ottenuta mediante una specifica trasformazione. Per esempio, è semplice pensare alla funzione quadrato di matrice $\hat{\mathbb{F}}(\hat{A}) = \hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$ perché abbiamo già definito il prodotto di matrici, ed il quadrato di una matrice è il prodotto di una matrice per se stessa. Estendendo questo ragionamento è ancora semplice definire la funzione potenza $n$-esima di matrice come

$\hat{\mathbb{F}}(\hat{A}) = \hat{A}^n = \hat{A}\hat{A}\cdots\hat{A}$. Quindi ogni potenza di matrice è definibile in maniera semplice, e quindi proveremo a definire l'esponenziale di matrice a partire dallo sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale.
Considerando tale sviluppo (sviluppo in serie di Mac-Laurin, ovvero sviluppo in serie di Taylor con punto di partenza $x_0 = 0$) abbiamo:

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}t^k + \cdots$$

Se siamo interessati alla soluzione di $x' = ax$ allora la soluzione sarà $x(t) = e^{at}$ che sviluppata in serie diventa

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(at)^k + \cdots \tag{1.4}$$

Prendendo ispirazione da tale sviluppo, cerchiamo la soluzione di $\mathbf{x}' = \hat{A}\mathbf{x}$ usando la funzione $\hat{F}(\hat{A}t) = e^{\hat{A}t}$ dove

$$e^{\hat{A}t} = \hat{\jmath} + \hat{A}t + \frac{1}{2!}\left(\hat{A}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\hat{A}t\right)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\hat{A}t\right)^k + \cdots \tag{1.5}$$

Ora, la proprietà fondamentale che dobbiamo richiedere all'esponenziale di matrice per poter avere che $\mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0$ sia soluzione di $\mathbf{x}' = \hat{A}\mathbf{x}$ è che

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0 = \hat{A}e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0 = \hat{A}\mathbf{x}(t)\,.$$

Per tale verifica, effettuiamo la derivata del membro di destra della (1.5), osservando che l'operatore di derivata agisce solo sui termini con la $t$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\hat{A}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\hat{\jmath} + \hat{A}t + \frac{1}{2!}\left(\hat{A}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\hat{A}t\right)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\hat{A}t\right)^k + \cdots\right] = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2!}\left(\hat{A}t\right)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{3!}\left(\hat{A}t\right)^3 + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{k!}\left(\hat{A}t\right)^k + \cdots = \\
&= 0 + \hat{A} + \hat{A}^2t + \frac{1}{2!}\hat{A}^3t^2 + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(k-1)!}\hat{A}^k t^{k-1} + \cdots = \\
&= \hat{A}\left[\hat{\jmath} + \hat{A}t + \frac{1}{2!}\left(\hat{A}t\right)^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\left(\hat{A}t\right)^{k-1} + \cdots\right] = \hat{A}e^{\hat{A}t}\,,
\end{aligned}$$

che è effettivamente l'uguaglianza che cercavamo.
Quindi, nel caso dei sistemi di equazioni differenziali, $\mathbf{x}' = \hat{A}\mathbf{x}$, per ricavare la soluzione generale abbiamo dovuto definire una funzione di matrice, la funzione esponenziale, $\hat{F}(\hat{A}t) = e^{\hat{A}t}$, tale che $\hat{F}'(\hat{A}t) = \hat{A}\hat{F}(\hat{A}t)$. A differenza del caso unidimensionale, la condizione iniziale deve necessariamente essere messa a destra dell'esponenziale di matrice in modo da avere un prodotto matrice per vettore coerente con il fatto che $\mathbf{x}(t)$ è un vettore. Inoltre, differenza assai più marcata rispetto al caso unidimensionale, è che non è assolutamente banale calcolare $e^{\hat{A}t}$, in quanto per matrici generiche effettuare la somma che definisce l'esponenziale di matrice (eq. (1.5)) è un'operazione praticamente impossibile.

## 1.2 Calcolo delle funzioni di matrici

Le due grandi famiglie di dinamiche lineari su spazi vettoriali che stiamo studiando, i sistemi di equazioni alle differenze ed i sistemi di equazioni differenziali, hanno come soluzione generale delle funzioni di matrici, ossia $\mathbf{x}_t = \hat{A}^t \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}(0)$, rispettivamente. Però, calcolare queste soluzioni è tutt'altro che banale. Per esempio, prendendo una matrice qualsiasi, chiunque provi a calcolare $\hat{A}^n$ per un $n$ abbastanza grande (tipo $n = 10$), si trova ad affrontare difficoltà numeriche pesanti, per non parlare del calcolo di $e^{\hat{A}t}$, che richiede, secondo lo sviluppo in serie (1.5), di calcolare tutte le potenze di $\hat{A}$.

### 1.2.1 Il caso delle matrici diagonali

Esistono tuttavia dei casi in cui tali calcoli si riescono ad affrontare. Il più emblematico è il caso delle matrici diagonali.

**Esempio 1.2.1.** *Consideriamo la matrice*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*e calcoliamo $\hat{A}^t$ e $e^{\hat{A}t}$.*

- *Calcolo di $\hat{A}^t$:*
  *procedendo in modo incrementale si ha che*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \hat{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

  *e quindi generalizzando*

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$$

- *Calcolo di $e^{\hat{A}t}$:*
  *dobbiamo inserire le espressioni che abbiamo trovato per le potenze della matrice $\hat{A}$ nello sviluppo in serie (1.5)*

$$e^{\hat{A}t} = \hat{\mathfrak{I}} + \hat{A}t + \frac{1}{2!}\left(\hat{A}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\hat{A}t\right)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\hat{A}t\right)^k + \cdots =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} t^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} t^k + \cdots$$

$$e^{\hat{A}t} = \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \frac{1}{3!}(2t)^3 + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Il caso generale. Uso della decomposizione spettrale

In generale, se la matrice non ha caratteristiche particolari, i calcoli di $\hat{A}^t$, $e^{\hat{A}t}$, o, più in generale, di qualsiasi funzione di matrice, possono essere affrontati solo attraverso la decomposizione spettrale dell'operatore $\hat{A}$. Infatti, se chiamiamo $\mathbb{F}$ la base dei sottospazi invarianti, l'operatore $\hat{A}_{\mathbb{F}}$ ha una forma a blocchi tali che il prodotto di $\hat{A}_{\mathbb{F}}$ con se stessa non mischia mai gli elementi di blocchi diversi, generalizzando quello che abbiamo potuto vedere nell'esempio di calcolo con la matrice diagonale. Pertanto il calcolo di qualsiasi funzione di matrice $\hat{F}(\hat{A})$ verrà effettuato a partire dalla rappresentazione di $\hat{A}$ nella base dei sottospazi invarianti. Prima di tutto consideriamo il caso di $\hat{A}^t$. Si ha che $\hat{A}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$ e quindi

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1} .$$

Sostituendo questa espressione di $\hat{A}$ (in termini della sua decomposizione spettrale) nella formula per il calcolo di $\hat{A}^t$ si ha:

$$\hat{A}^t = \hat{A}\hat{A}\hat{A}\cdots\hat{A} = \left(\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\right)\left(\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\right)\left(\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\right)\cdots\left(\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\right) =$$
$$= \hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1}\cdots\hat{U}\hat{A}_F\hat{U}^{-1} = \hat{U}\hat{A}_F\hat{A}_F\hat{A}_F\cdots\hat{A}_F\hat{U}^{-1} =$$
$$= \hat{U}\hat{A}_F^t\hat{U}^{-1} ,$$

e quindi

$$\hat{A}^t = \hat{U}\hat{A}_F^t\hat{U}^{-1} \tag{1.6}$$

avendo semplificato $\hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{\mathbb{I}}$.
Analogamente, si può mostrare che

$$e^{\hat{A}t} = \hat{U}e^{\hat{A}_F t}\hat{U}^{-1} , \tag{1.7}$$

per le proprietà dello sviluppo in serie di potenze (vedi eq. (1.5) ed esempio precedente), e, in generale, per qualsiasi funzione sviluppabile in serie di potenze di ha

$$\hat{\mathbb{F}}(\hat{A}) = \hat{U}\hat{F}(\hat{A}_F)\hat{U}^{-1} . \tag{1.8}$$

**Esempio 1.2.2.** *Consideriamo la matrice*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*e calcoliamo $\hat{A}^t$ e $e^{\hat{A}t}$.*

*Come prima cosa effettuiamo la decomposizione spettrale di $\hat{A}$. Calcoliamone gli autovalori:*

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathbb{I}}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 .$$

*Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene due autovalori semplici pari a 1 e 2, $\sigma(\hat{A}) = (1,2)$. Calcoliamo prima l'autovettore associato a $\lambda = 1$:*

$$(\hat{A} - \hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \{x = -2y \to \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

*Calcoliamo ora l'autovettore associato a $\lambda = 2$:*

$$(\hat{A} - 2\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \{x = -y \to \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

*Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $\hat{A}$ attraverso la sua rappresentazione nella base degli autovettori $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ con*

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad con \ \hat{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \ \hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

*dove $\hat{U}$ è la matrice del cambiamento di base $\mathbb{F} = \mathbb{E}\hat{U}$. Calcoliamo $\hat{A}^t$:*

$$\hat{A}^t = \hat{U}\hat{A}_F^t\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^t & 2 - 2^{t+1} \\ -1 + 2^t & -1 + 2^{t+1} \end{pmatrix} .$$

*Calcoliamo $e^{\hat{A}t}$:*

$$e^{\hat{A}t} = \hat{U}e^{\hat{A}_F t}\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Finora abbiamo affrontato il calcolo di potenze ed esponenziali di matrici solo nel caso più semplice di matrici diagonalizzabili, ossia nel caso di autovalori reali e distinti, ovvero con autovalori reali con ma($\lambda$)=mg($\lambda$). Però la decomposizione spettrale comprende anche i casi di autovalori reali e concidenti con ma($\lambda$)>mg($\lambda$) e autovalori complessi e coniugati. Nei prossimi tre paragrafi riassumeremo il caso dei reali e distinti e affronteremo il calcolo degli altri due casi.

### 1.2.3 Autovalori reali e distinti

Nel caso in cui la matrice $\hat{A}$ è diagonalizzabile, si ha che

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1} = \hat{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} ,$$

e abbiamo già visto che:

**Potenza di matrice**

$$\hat{A}^t = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}^t\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

**Esponenziale di matrice**

$$e^{\hat{A}t} = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

### 1.2.4 Autovalori reali e coincidenti

Nel caso in cui sia presente un autovalore tale che ma($\lambda$) >mg($\lambda$) si ha un blocchetto di Jordan. In questo caso

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\hat{U}^{-1},$$

e con dei calcoli leggermente laboriosi (che non riporteremo) si ottiene:

**Potenza di matrice**

$$\hat{A}^t = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}^t\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2!}\lambda^{t-2} & \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\lambda^{t-3} & \cdots \\ 0 & \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2!}\lambda^{t-2} & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

**Esponenziale di matrice**

$$e^{\hat{A}t} = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} & \cdots \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

Le formule per la potenza e l'esponenziale di matrici nel caso di blocchetti di Jordan sono state presentate fino al caso 4x4 (i casi 2x2 e 3x3 sono compresi nella 4x4).

### 1.2.5 Caso complessi coniugati

Nel caso in cui siano presenti due autovalori complessi coniugati $\lambda = \lambda_a \pm i\lambda_b$, si ha che

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} \lambda_a & \lambda_b \\ -\lambda_b & \lambda_a \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

Per calcolare potenza ed esponenziale di matrice è fondamentale notare che la forma matriciale $\begin{pmatrix} \lambda_a & \lambda_b \\ -\lambda_b & \lambda_a \end{pmatrix}$ si dimostra essere la rappresentazione matriciale del numero complesso $\lambda = \lambda_a \pm i\lambda_b$. Per meglio chiarire, se una matrice ha sulla diagonale principale il valore reale $a$ e sull'altra diagonale il valore reale $b$ (cambiato una volta di segno), allora nelle operazioni algebriche (ossia somme, sottrazioni, prodotti e divisioni) tale matrice si comporta esattamente come se fosse il numero complesso $z = a + ib$:

$$a + ib \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

**Esempio 1.2.3.** *Consideriamo i due numeri complessi $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -i$. Se effettuiamo il prodotto $z_1 z_2$ otteniamo:*

$$z_1 z_2 = (1 + i)(-i) = 1 - i\,.$$

*Ora scriviamo la rappresentazione matriciale di $z_1$ e $z_2$ ed effettuiamo il prodotto tra le matrici risultanti:*

$$z_1 \quad \to \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad z_2 \quad \to \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_1\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad z_1 z_2 = 1 - i$$

Per cui l'idea è di calcolare la potenza o l'esponenziale di matrice effettuando l'operazione sul numero complesso rappresentato dalla matrice, che è un'operazione sicuramente piu' semplice, e poi di scrivere il risultato in rappresentazione matriciale, ottenendo il risultato cercato.

**Potenza di matrice** La potenza del numero complesso $\lambda = \lambda_a \pm i\lambda_b$, si calcola facilmente passando in rappresentazione trigonometrica:

$$(\lambda)^t = (\lambda_a \pm i\lambda_b)^t = (\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))^t = (\rho^t(\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)))$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formula di De Moivre. Ora, sfruttando l'analogia tra le rappresentazioni si ha

$$\hat{A}^t = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}^t\hat{U}^{-1} = \hat{U}\begin{pmatrix} \rho^t\cos(\theta t) & \rho^t\sin(\theta t) \\ -\rho^t\sin(\theta t) & \rho^t\cos(\theta t) \end{pmatrix}\hat{U}^{-1}.$$

**Esponenziale di matrice** Anche in questo caso calcoliamo prima l'esponenziale del numero complesso $\lambda = \lambda_a + i\lambda_b$, In questo caso possiamo effettuare direttamente l'operazione, ed ottenere

$$e^{\lambda t} = e^{(\lambda_a + i\lambda_b)t} = e^{\lambda_a t} e^{i\lambda_b t} = e^{\lambda_a t}(\cos(\lambda_b t) + i\sin(\lambda_b t))$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formula di Eulero. Ora, sfruttando l'analogia tra le rappresentazioni si ha

$$e^{\hat{A}t} = \hat{U} e^{\hat{A}_{\mathbb{F}} t} \hat{U}^{-1} = \hat{U} \begin{pmatrix} e^{\lambda_a t}\cos(\lambda_b t) & e^{\lambda_a t}\sin(\lambda_b t) \\ e^{\lambda_a t} - \sin(\lambda_b t) & e^{\lambda_a t}\cos(\lambda_b t) \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} .$$

## 1.3 Dinamiche lineari su spazi vettoriali

Dopo quando sviluppato negli ultimi paragrafi diventa abbastanza semplice risolvere sistemi di equazioni alle differenze e sistemi di equazioni differenziali. Per ricapitolare, nel caso delle equazioni alle differenze

$$\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t \qquad \text{con soluzione} \qquad \mathbf{x}_t = \hat{A}^t \mathbf{x}_0$$

e nel caso delle equazioni differenziali

$$\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) \qquad \text{con soluzione} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0$$

le soluzioni sono praticamente solo formali, in quanto nel caso generale è praticamente impossibile calcolare potenze ed esponenziali di matrici. Per cui è necessario sfruttare le formule di calcolo:

$$\hat{A}^t \mathbf{x}_0 = \hat{U}\hat{A}^t_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 \qquad \text{e} \qquad e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0 = \hat{U} e^{\hat{A}_{\mathbb{F}} t}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 .$$

A tale scopo, si inizia con la decomposizione spettrale dell'operatore e si determina la rappresentazione dell'operatore nella base dei sottospazi invarianti. Per fissare le idee, prendiamo il caso di un generico operatore $\hat{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che può avere differenti tipologie di sottospazi invarianti. Supponiamo che la base dei sottospazi invarianti sia

$$\mathbb{F} = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^{(1)}, \cdots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m^{(1)}, \mathbf{w}_{1_a}, \mathbf{w}_{1_b}, \cdots, \mathbf{w}_{p_a}, \mathbf{w}_{p_b})$$

dove gli $\mathbf{u}_i$ per $i = 1 \cdots l$ sono $l$ autovettori associati agli autovalori semplici $\lambda_i$, gli $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{v}_j^{(1)}$ per $j = 1 \cdots m$ sono autovettori e relativo primo autovettore generalizzato associato agli autovalori doppi $\lambda_j$ (dove per semplicità si è supposto che $ma(\lambda_j) = 2$ e $mg(\lambda_j) = 1$) e infine gli $\mathbf{w}_{a_k}$ e $\mathbf{w}_{b_k}$ per $k = 1 \cdots p$ sono parte reale e parte immaginaria degli autovettori complessi coniugati $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{k_a} \pm i\mathbf{w}_{k_b}$ associati agli autovalori complessi coniugati $\lambda_k = \lambda_{k_a} \pm i\lambda_{k_b}$. Allora, la matrice del cambiamento di base è

$$\hat{U} = \left( \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_1^{(1)} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{w}_{1_a} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{w}_{1_b} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \right)$$

e la rappresentazione dell'operatore $\hat{A}$ nella base $\mathbb{F}$ sarà:

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} (\lambda_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \lambda_{a_k} & \lambda_{b_k} \\ -\lambda_{b_k} & \lambda_{a_k} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

**Equazioni alle differenze** Se dobbiamo risolvere l'equazione $\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t$ allora la soluzione sarà:

$$\mathbf{x}_t = \hat{A}^t \mathbf{x}_0 = \hat{U} \hat{A}_{\mathbb{F}}^t \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_t = \hat{U} \begin{pmatrix} (\lambda_i^t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \lambda_j^t & t\lambda_j^{t-1} \\ 0 & \lambda_j^t \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \rho_k^t \cos(\theta_k t) & \rho_k^t \sin(\theta_k t) \\ -\rho_k^t \sin(\theta_k t) & \rho_k^t \cos(\theta_k t) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0 \,.$$

**Equazioni differenziali** Se dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$ allora la soluzione sarà:

$$\mathbf{x}_t = e^{\hat{A}t} \mathbf{x}_0 = \hat{U} e^{\hat{A}_{\mathbb{F}} t} \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_t = \hat{U} \begin{pmatrix} (e^{\lambda_i t}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & t e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} e^{\lambda_{k_a} t} \cos(\lambda_{k_b} t) & e^{\lambda_{k_a} t} \sin(\lambda_{k_b} t) \\ -e^{\lambda_{k_a} t} \sin(\lambda_{k_b} t) & e^{\lambda_{k_a} t} \cos(\lambda_{k_a} t) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0 \,.$$

### 1.3.1 La soluzione nella base degli autovettori

Nel caso particolarmente semplice in cui l'operatore $\hat{A}$ è diagonalizzabile, esiste una rappresentazione molto immediata della soluzione delle dinamiche lineari. Supponiamo quindi che l'operatore $\hat{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ abbia solo sottospazi invarianti unidimensionali e reali. Supponiamo che la base dei sottospazi invarianti sia

$$\mathbb{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n)$$

dove gli $\mathbf{u}_i$ per $i = 1 \cdots n$ sono gli $n$ autovettori associati agli autovalori semplici $\lambda_i$. La matrice del cambiamento di base è

$$\hat{U} = \left( \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_n \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

e la rappresentazione dell'operatore $\hat{A}$ nella base $\mathbb{F}$ sarà:

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Introduciamo per comodità il vettore $\mathbf{c}$ che rappresenta la condizione iniziale nella base degli autovettori:

$$\mathbf{c} = \hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} .$$

**Equazioni alle differenze** Se dobbiamo risolvere l'equazione $\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t$ allora la soluzione sarà:

$$\mathbf{x}_t = \hat{A}^t\mathbf{x}_0 = \hat{U}\hat{A}^t_{\mathbb{F}}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 = \hat{U}\hat{A}^t_{\mathbb{F}}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}_t = \left( \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_n \\ \\ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} .$$

Sviluppando i prodotti righe per colonne, ed osservando che ogni autovettore ($\mathbf{u}_i$) verrà moltiplicato solo per il relativo autovalore elevato alla $t$ e per il coefficiente $c_i$ si ha

$$x_t = c_1\mathbf{u}_1\lambda_1^t + c_2\mathbf{u}_2\lambda_2^t + \cdots + c_n\mathbf{u}_n\lambda_n^t .$$

Questa espressione è particolarmente semplice ed istruttiva, in quanto ci dice che la soluzione generale è una combinazione lineare delle $n$ soluzioni di base $\mathbf{u}_i\lambda_i^t$ con coefficienti pari a $c_i$. Nel caso in cui sia fissata la condizione iniziale $x_0$, si ha che le $c_i$ rappresentano l'$i-$esima coordinata della condizione iniziale, $\mathbf{x}_0$, vista nella base degli autovettori.

**Equazioni differenziali** Se dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$ allora la soluzione sarà:

$$\mathbf{x}_t = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}_0 = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}(t) = \left( \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_n \\ \\ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} .$$

Sviluppando i prodotti righe per colonne, ed osservando che ogni autovettore ($\mathbf{u}_i$) verrà moltiplicato solo per l'esponenziale del relativo autovalore e per il coefficiente $c_i$ si ha

$$x(t) = c_1\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{u}_n e^{\lambda_n t} .$$

Questa espressione è particolarmente semplice ed istruttiva, in quanto ci dice che la soluzione generale è una combinazione lineare delle $n$ soluzioni di base $\mathbf{u}_i e^{\lambda_i t}$ con coefficienti pari a $c_i$. Nel caso in cui sia fissata la condizione iniziale $x_0$, si ha che le $c_i$ rappresentano l'$i-$esima coordinata della condizione iniziale, $\mathbf{x}_0$, vista nella base degli autovettori.