Università LUISS Guido Carli, A.A. 2010-2011 (II semestre)

Metodi Matematici per la Finanza

Dott. Davide Vergni

Equazioni differenziali ed alle differenze

Indice

Capitolo 1

Equazioni differenziali ed alle differenze lineari

1.0.1 Obiettivi principali del capitolo

Dopo aver introdotto gli spazi vettoriali, gli operatori lineari, autovalori ed autovettori, siamo pronti a mettere a frutto tutto questo corpus teorico applicandolo alla soluzione di equazioni differenziali e di equazioni alle differenze lineari ed a coefficienti costanti. In questo capitolo si affronterà il caso di sistemi unidimensionali.

1.0.2 Notazione

Trattando l'evoluzione temporale di un sistema, ovvero di uno stato che rappresenta un sistema, in questo capitolo si introdurrà il tempo. Tratteremo il tempo sia come variabile continua (ed in questo caso si troverà tra parentesi tonde, i.e., $x(t)$, $\mathbf{v}(t)$), che come variabile discreta (ed in questo caso si troverà come pedice, i.e., x_t, $\mathbf{v}_t$). Per quanto riguarda le variabili continue, di importanza fondamentale sarà la derivata dello stato, che, a volte, indicheremo con un'apice: $x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$.

1.1 Dinamica di un sistema

Una variabile, x, o un elemento di uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}$, acquistano importanza dal punto di vista delle applicazioni quando attraverso di esse rappresentiamo una grandezza o uno stato che possiamo associare ad un sistema di interesse. Per esempio, nel nostro caso, un sistema economico. Tali grandezze presentano, in generale, una dinamica, ossia evolvono e si trasformano al passare del tempo. La dinamica di un sistema dipenderà dallo stato in cui si trova il sistema e dalle condizioni esterne alle quali è sottoposto. Esistono due tipi di descrizioni per la dinamica dello stato di un sistema, una descrizione a tempo continuo ed una descrizione a tempo discreto.

Esempio 1.1.1. *Siamo interessati all'evoluzione del nostro conto in banca. Supponiamo di aver versato al tempo $t = 0$ un capitale pari ad x_0 e supponiamo che la banca paghi un tasso di interesse pari all'$r\%$ annuo. Qual'è la dinamica (ossia l'evoluzione) del capitale presente nel conto se lo lasciamo fisso in banca? Se al tempo*

t il capitale è pari ad x_t al tempo $t+1$ sarà pari a

$$x_{t+1} = x_t + r x_t = (1+r)x_t \,. \tag{1.1}$$

Questo è un esempio di equazione alle differenze in cui lo stato del sistema al tempo $t+1$ è determinato dallo stato del sistema al tempo t, ed è fissata una condizione iniziale (il capitale iniziale x_0). Il tempo, t, in questo caso è una variabile discreta che procede a salti di un anno.
Se la banca pagasse un interesse istantaneo $r\mathrm{d}t$ (ossia un interesse pari ad r relativamente all'istante $\mathrm{d}t$ invece che un interesse annuo pari ad r) l'equazione sarebbe stata molto diversa:

$$x(t+\mathrm{d}t) = x_t + r\mathrm{d}t x_t \;\;\rightarrow\;\; x(t+\mathrm{d}t) - x_t = r\mathrm{d}t x_t \;\;\rightarrow\;\; \frac{x(t+\mathrm{d}t) - x_t}{\mathrm{d}t} = r x_t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = x'(t) = r x(t) \,, \tag{1.2}$$

dove abbiamo usato la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. In questo caso abbiamo un'equazione differenziale, in cui la variazione dello stato del sistema al tempo t ($x'(t)$) è determinato dallo stato del sistema allo stesso istante t, ed è fissata una condizione iniziale (il capitale iniziale x_0). Il tempo, t, in questo caso è una variabile continua.

1.1.1 Equazioni alle differenze lineari del primo ordine omogenee a coefficienti costanti

Le più semplici equazioni alle differenze che si possono incontrare sono del tipo:

$$x_{t+1} = a x_t \qquad \rightarrow \qquad (D-a)x_t = 0 \,, \tag{1.3}$$

introducendo l'operatore di incremento temporale, D, tale che

$$D x_t = x_{t+1} \,. \tag{1.4}$$

Tale operatore, come la derivata se considerata come "operatore di derivazione", è un operatore lineare. Infatti,

$$D(a x_t) = a x_{t+1} = a D(x_t) \,, \quad \text{e} \quad D(x_t + y_t) = x_{t+1} + y_{t+1} = D(x_t) + D(y_t) \,.$$

Si chiamano **lineari** perché l'equazione può essere scritta come una combinazione lineare di operatori lineari; **omogenee** perché non compare nessun termine noto; a **coefficienti costanti** perché nessun operatore dipende esplicitamente dal tempo. Di queste equazioni è semplice trovarne la soluzione: data x_0 la condizione di partenza (chiamata **condizione iniziale**) si ha che:

$$x_1 = a x_0 \,, \;\; x_2 = a x_1 = a^2 x_0 \,, \;\; x_3 = a x_2 = a^3 x_0 \,, \;\; \rightarrow$$

$$x_t = a^t x_0 \,, \tag{1.5}$$

è la soluzione generale dell'equazione (1.3).

Esempio 1.1.2. *Calcolare l'evoluzione annua di un deposito bancario di* 100 *euro, considerando un tasso fisso di interesse pari all'*1%.

Il dato iniziale è $x_0 = 100$*, mentre la dinamica è* $x_{t+1} = (1+r)x_t$*, dove* t *si misura in anni e* $r = 0.01$*. Per cui, usando la formula (1.5) si ottiene*

$$x_t = 100 \cdot (1.01)^t \,.$$

1.1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee a coefficienti costanti

Le più semplici equazioni differenziali che si possono incontrare sono del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t) \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - a\right)x(t) = 0 \tag{1.6}$$

Si chiamano **lineari** perché l'equazione può essere scritta come una combinazione lineare di operatori lineari; **omogenee** perché non compare nessun termine noto; a **coefficienti costanti** perché nessun operatore dipende esplicitamente dal tempo. Anche di queste equazioni è semplice trovare la soluzione se osserviamo che per risolvere l'equazione (1.6) dobbiamo cercare una funzione la cui derivata è proporzionale alla funzione stessa. L'unica funzione ad avere questa proprietà è l'esponenziale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = ae^{at} \,.$$

Quindi ponendo

$$x(t) = x(0)e^{at} \,, \tag{1.7}$$

si ha che $x' = ax$ e quindi (1.7) è la soluzione generale dell'equazione (1.6), con $x(0)$ stato del sistema al tempo 0.

Esempio 1.1.3. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale* $x' + x = 0$.

Visto che non abbiamo fissato il dato iniziale scriveremo $x(0) = c$*. Sfruttando la formula (1.7) si ottiene*

$$x(t) = ce^{-t} \,.$$

1.1.3 Dinamiche lineari del primo ordine omogenee a coefficienti costanti

Manipolando opportunamente le equazioni alle differenze (1.3) e le equazioni differenziali (1.3) lineari omogenee ed a coeffecienti costanti per mezzo dell'utilizzo degli operatori di incremento temporale e dell'operatore differenziale possiamo presentarle in una forma molto simile:

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t \\ x'(t) = ax(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D-a)x_t = 0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - a\right)x(t) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Quindi, introducendo un generico operatore della dinamica L entrambi le equazioni di evoluzione si possono scrivere nella forma

$$(L-a)x = \phi(x) = 0\,. \tag{1.9}$$

dove x è lo stato del sistema (a tempo discreto, x_t, a tempo continuo, $x(t)$) e l'operatore lineare della dinamica, ϕ, assume la forma $\phi = (D-a))$ nel caso a tempi discreti oppure la forma $\phi = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - a\right)$ nel caso a tempi continui. In entrambi i casi è semplice dimostrare che ϕ è un operatore lineare, e quindi le soluzioni del problema di evoluzione dinamica si traducono nella ricerca delle soluzioni dell'equazione (1.9) e quindi nella ricerca degli elementi del nucleo di ϕ. A seconda del tipo di operatore in esame le soluzioni saranno diverse, ma sappiamo che essendo ϕ un operatore lineare tra spazi vettoriali, le soluzioni saranno un sottospazio vettoriale di cui sarà sufficiente determinare una base. La soluzione generale della dinamica lineare sarà quindi una combinazione lineare di tutte queste soluzioni di base. Abbiamo già visto due di queste soluzioni generali: $x_t = ca^t$ per le equazioni alle differenze, dove la soluzione di base è a^t, e $x(t) = ce^{at}$ per le equazioni differenziali, dove la soluzione di base è e^{at}.

1.1.4 Il problema di Cauchy

Una considerazione importante è che le dinamiche lineari, ed in generale qualsiasi equazione differenziale o alle differenze, non ammettono soluzioni singole, ma famiglie intere di soluzioni che si ottengono al variare di alcuni parametri (c nel caso delle soluzioni scritte nel paragrafo precendente). Nel caso della soluzione di problemi applicati, lo stato x del sistema identificherà una grandezza del mondo reale, e molto spesso saremo interessati all'evoluzione di questa grandezza a partire da una condizione iniziale, ossia dal suo valore attuale. Questo implica che di tutta la famiglia delle funzioni soluzioni dell'equazione differenziale dovrò scegliere quella specifica che verifica la condizione iniziale. Questo equivale a risolvere quello che viene chiamato **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} (L-a)x = 0 \\ x|_{t_0} = x_0 \end{cases}, \tag{1.10}$$

dove t_0 è il tempo iniziale e x_0 è il valore iniziale, e con $x|_{t_0}$ indichiamo lo stato del sistema al tempo t_0 (il che è equivalente a scrivere x_{t_0} nel caso del tempo discreto e $x(t_0)$ nel caso del tempo continuo). Se vogliamo specificare i casi delle equazioni alle differenze e differenziali si ha

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t \\ x_{t_0} = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Esempio 1.1.4. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' + 2x = 0 \\ x(1) = -1 \end{cases}.$$

La soluzione generale di $x' + 2x = 0$ *è* $x(t) = ce^{-2t}$. *Imponendo la condizione iniziale* $x(1) = 2$ *si ha*

$$x(1) = ce^{-2} = -1 \qquad \rightarrow \qquad c = -e^2\,.$$

Per cui la soluzione passante per la condizione iniziale è:

$$x(t) = -e^2 e^{-2t} \qquad \to \qquad x(t) = -e^{-2(t-1)} .$$

L'ultimo espressione può anche essere scritta come $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$, che è la soluzione del problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \to \qquad x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} . \tag{1.12}$$

Analogamente per il caso delle equazioni alle differenze

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t \\ x_{t_0} = x_0 \end{cases} \qquad \to \qquad x(t) = x_0 a^{t/t_0} . \tag{1.13}$$

1.2 Dinamiche lineari di ordine n

L'introduzione di equazioni dinamiche (differenziali o alle differenze) di ordine n è motivata dal fatto che in molti sistemi (e quelli economici non fanno eccezione) non è raro trovare equazioni che hanno una doppia derivata o un incremento temporale (ossia una dipendenza temporale) di due, tre o più step nel passato, e quindi è necessario risolvere equazioni di grado superiore al primo.

1.2.1 Equazioni alle differenze lineari omogenee a coefficienti costanti

Un'equazione alle differenze lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n può essere scritta come

$$a_n x_{t+n} + a_{n-1} x_{t+n-1} + \cdots + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0 . \tag{1.14}$$

dove a_i sono i coefficienti (costanti) dell'equazione mentre i vari x_{t+i} sono lo stato del sistema al tempo $t+i$. Quindi un'equazione alle differenze di ordine n è un'equazione in cui per determinare lo stato del sistema al tempo $t+n$ bisogna conoscere tutti gli stati precedenti fino al tempo t. Come abbiamo visto nel paragrafo 1.1.1 se l'equazione (1.14) fosse del primo ordine la soluzione sarebbe del tipo $x_t = a^t x_0$. Ispirati da questo risultato cerchiamo anche in questo caso soluzioni del tipo $x_t = \lambda^t$. Inserendo questa espressione nell'equazione (1.14) otteniamo:

$$a_n\lambda^{t+n}+a_{n-1}\lambda^{t+n-1}+\cdots+a_1\lambda^{t+1}+a_0\lambda^t = x_t(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda^1+a_0\lambda^0) = 0 .$$

Visto che $x_t = \lambda^t$ è sempre diverso da zero (a meno di non prendere $\lambda = 0$), questa equazione ha soluzioni solo se

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 . \tag{1.15}$$

Tale equazione viene detta **equazione caratteristica** e, ad ogni λ soluzione di tale equazione, è associata una soluzione dell'equazione (1.14) del tipo $x_t = c \cdot \lambda^t$. La soluzione generale sarà composta da una combinazione lineare di tali soluzioni di base, nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano semplici, ossia a molteplicità algebrica pari ad uno.

Esempio 1.2.1. *Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze*

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione alle differenze è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$*, con soluzioni* $\lambda = 1, 2$*. Per cui, soluzione generale dell'equazione alle differenze sarà*

$$x_t = c_1(1)^t + c_2(2)^t = c_1 + c_2 \cdot 2^t\,.$$

1.2.2 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n può essere scritta come

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} x(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + a_0 x(t) = 0\,. \tag{1.16}$$

dove a_i sono i coefficienti (costanti) dell'equazione mentre le varie $\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} x(t)$ sono le derivate di ordine i dello stato del sistema. Quindi un'equazione alle differenze di ordine n è un'equazione che lega lo stato del sistema al tempo t con tutte le sue derivate fino all'ordine $n-$esimo. Come abbiamo visto nel paragrafo 1.1.2 se l'equazione fosse del primo ordine la soluzione sarebbe del tipo $x(t) = e^{at} x_0$. Ispirati da questo risultato cerchiamo anche in questo caso soluzioni del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$. Inserendo questa espressione nell'equazione (1.16) otteniamo:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{\lambda t} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} e^{\lambda t} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = \\ & = a_n \lambda^n x(t) + a_{n-1} \lambda^{n-1} x(t) + \cdots + a_1 \lambda^1 + a_0 x(t) = \\ & = x(t)(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda^1 + a_0 \lambda^0) = 0\,. \end{aligned}$$

Visto che $x(t) = e^{\lambda t}$ è sempre diverso da zero, questa equazione ha soluzione solo se

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,. \tag{1.17}$$

Tale equazione, anche in questo caso, viene detta **equazione caratteristica** e, ad ogni λ soluzione di tale equazione, è associata una soluzione dell'equazione (1.16) del tipo $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$. È evidente come l'equazione caratteristica è esattamente la stessa sia nel caso delle equazioni alle differenze (eq. (1.15)) che nel caso delle equazioni differenziali (eq. (1.17)). L'unica cosa che cambia è il tipo di soluzione associato. Questo fatto ha una radice profonda nelle caratteristiche delle equazioni in esame che possono essere viste come operatori lineari su spazi vettoriali. La ricerca delle soluzioni è la ricerca degli elementi del nucleo dell'operatore lineare. Se l'operatore cambia forma (passando da D a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$) avremo differenti elementi del nucleo, ma in

entrambi i casi, formano un sottospazio vettoriale che sarà determinato una volta determinata una sua base, e, elemento fondamentale nella ricerca di queste soluzioni passa per la ricerca delle soluzioni dell'equazione caratteristica, che vengono dette, anche in questo caso autovalori.
Discuteremo di questi argomenti nel prossimo paragrafo.

Esempio 1.2.2. *Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$*, con soluzioni* $\lambda = 1, 2$*. Per cui, soluzione generale dell'equazione differenziale sarà*

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

1.2.3 Dinamiche lineari come azione di operatori lineari

Applicando la teoria degli operatori lineari precedentemente sviluppata e le semplici considerazioni effettuate negli ultimi paragrafi troveremo un framework comune nell'analisi delle soluzioni di equazioni alle differenze ed equazioni differenziali.

La teoria sarà presentata in astratto, considerando un operatore L che può essere o di derivazione o di incremento temporale. Quindi, un'equazione di ordine n, lineare, omogenea a coefficienti costanti sarà della forma:

$$(a_n L^n + a_{n-1} L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0)x = 0\,, \tag{1.18}$$

dove x può rappresentare sia una funzione discreta del tempo, x_t, che una funzione continua del tempo $x(t)$. Tale equazione, indipendentemente dal tipo di operatore L, ha associata un'equazione caratteristica come le eq. (1.15) e (1.17):

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

Per quello che abbiamo visto nei paragrafi precedenti, e per quello che sappiamo dell'algebra lineare, del teorema fondamentale dell'algebra, e della decomposizione in fattori, se consideriamo in termini astratti l'equazione (1.18) essa può essere rappresentata come

$$(a_n L^n + a_{n-1} L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0)x = a_n \left(\prod_{i=1}^{n} (L - \lambda_i)\right) x =$$

$$a_n \left(\prod_{i=1}^{m} (L - \lambda_i)^{\alpha_i}\right) x = 0\,, \tag{1.19}$$

dove n è il grado dell'equazione, m il numero di radici distinte, λ_i, dell'equazione caratteristica e α_i la loro molteplicità algebrica. Visto che il prodotto di operatori $(L - \lambda_i)^{\alpha_i}$ nell'equazione (1.19) commuta, non appena x appartiene al nucleo di uno qualsiasi dei citati operatori, allora apparterrà anche al nucleo di (1.18). Per cui, determineremo le soluzioni di tale equazione una volta trovata una base per il nucleo di $(L-\lambda_i)^{\alpha_i}$ per ogni i. Vedremo che ogni operatore del tipo $(L-\lambda_i)^{\alpha_i}$ ha un nucleo di dimensione α_i, e quindi, visto che $\sum_{i=i}^{m} \alpha_i = n$ troveremo n soluzioni indipendenti per (1.18) che formano la base dello spazio vettoriale delle soluzioni che pertanto sarà di dimensione n.

1.2.4 Problema di Cauchy per le equazioni di grado n

La soluzione generale di (1.18) sarà data dalla combinazione lineare delle n soluzioni di base. Per avere la dinamica dello stato "reale" occorrerà fissare delle condizioni iniziali. Nel caso delle equazioni di primo grado è stato sufficiente fissare una condizioni iniziale sullo stato, mentre in questo caso occorrerà fissare n condizioni iniziali, sullo stato iniziale del sistema e sullo stato agli $n-1$ tempi successivi per le equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} a_n x_{t+n} + a_{n-1} x_{t+n-1} + \cdots + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0 \\ x_{t_0} = x_0^0 \\ D x_{t_0} = x_{t_0+1} = x_1^0 \\ D^2 x_{t_0} = x_{t_0+2} = x_2^0 \\ \vdots \\ D^{n-1} x_{t_0} = x_{t_0+n-1} = x_{n-1}^0 \end{cases}$$

oppure sullo stato iniziale del sistema e sullo derivate dello stato fino all'ordine $n-1$ per le equazioni differenziali:

$$\begin{cases} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} x(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + a_0 x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0^0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t_0) = x'(t_0) = x_0^{(1)} \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t_0) = x''(t_0) = x_0^{(2)} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} x(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} .$$

In generale, sfruttando l'operatore delle dinamica L, possiamo scrivere il problema di Cauchy come:

$$\begin{cases} (a_n L^n + a_{n-1} L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0) x = 0 \\ x|_{t_0} = x_0^0 \\ Lx|_{t_0} = x_0^1 \\ L^2 x|_{t_0} = x_0^2 \\ \vdots \\ L^{n-1} x|_{t_0} = x_0^{n-1} \end{cases} , \tag{1.20}$$

1.2.5 Nucleo di $(L-\lambda)^\alpha$

Tornando alla ricerca del nucleo di $(L-\lambda)^\alpha$, a seconda di λ e α distinguiamo vari casi:

λ_i reali e distinti

Abbiamo già mostrato nei paragrafi precedenti che:

Equazioni alle differenze all'equazione

$$(D-\lambda)x_t = 0$$

è associata la soluzione (vedi paragrafo 1.1.1, formula (1.5))

$$x_t = \lambda^t\,,$$

che forma la base unidimensionale del sottospazio delle soluzioni.

Equazioni differenziali all'equazione

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda\right) x(t)$$

è associata la soluzione (vedi paragrafo 1.1.2, formula (1.7))

$$x(t) = e^{\lambda t}\,,$$

che forma la base unidimensionale del sottospazio delle soluzioni.

λ_i reali e coincidenti

L'equazione da risolvere è $(L-\lambda)^{\alpha_\lambda} x = 0$, dove $\alpha_\lambda > 1$ è la molteplicità algebrica di α. Tanto per fissare le idee, supponiamo che $\alpha_\lambda = 3$. Allora possiamo scrivere:

$$(L-\lambda)^3 x = (L-\lambda)(L-\lambda)(L-\lambda)x = 0\,. \tag{1.21}$$

Una soluzione semplice è quella associata al caso reale e distinto, ossia $(L-\lambda)x = 0$. Tale soluzione la chiameremo $x^{(1)}$. Un'altra soluzione la possiamo ottenere cercando le soluzioni di

$$(L-\lambda)x = x^{(1)}$$

che chiameremo $x^{(2)}$ e l'ultima soluzione sarà data dalle soluzioni di

$$(L-\lambda)x = x^{(2)}$$

che chiameremo $x^{(3)}$. Sostituendo le espressioni di $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ in (1.21) è facile convincersi del fatto che sono effettivamente tutte e sole le soluzioni di tale equazione. Per esempio, sostituiamo $x^{(2)}$ nell'equazione (1.21) e vediamo quello che succede:

$$(L-\lambda)^3 x^{(2)} = (L-\lambda)(L-\lambda)(L-\lambda)x^{(2)} =$$

$$= (L-\lambda)(L-\lambda)x^{(1)} = (L-\lambda)0 = 0\,.$$

Quindi, in generale, se abbiamo un λ con $\mathrm{ma}(\lambda) = k$ avremo k soluzioni distinte che possiamo ottenere seguendo la regola della catena:

$$\begin{aligned}
(L-\lambda)x^{(1)} &= 0\,,\\
(L-\lambda)x^{(2)} &= x^{(1)}\,,\\
(L-\lambda)x^{(3)} &= x^{(2)}\,,\\
&\vdots\\
(L-\lambda)x^{(k)} &= x^{(k-1)}\,.
\end{aligned}$$

Equazioni alle differenze La prima equazione della catena la abbiamo già risolta ottenendo $(D-\lambda)x_t^{(1)} = 0$ se $x_t^{(1)} = \lambda^t$, per cui la prima equazione nuova da risolvere è

$$(D-\lambda)x_t^{(2)} = x_t^{(1)} = \lambda^t\,.$$

Ovviamente non possiamo scegliere $x_t^{(2)} = \lambda^t$ perché si avrebbe $(D-\lambda)x_t^{(2)} = 0$. D'altra parte, la soluzione dovrà comunque avere un termine esponenziale del tipo $x_t^{(2)} \sim \lambda^t$ perché l'equazione ha come termine non omogeneo proprio λ^t. Per risolvere questo problema, vediamo, in generale, qual'è l'effetto dell'operatore $(D-\lambda)$ su funzioni del tipo $x_t = t^k\lambda^t$:

$$(D-\lambda)x_t = (D-\lambda)t^k\lambda^t = (t+1)^k\lambda^{t+1} - t^k\lambda^{t+1} = \lambda\left((t+1)^k - t^k\right)\lambda^t\,.$$

Nell'ultima espressione, il polinomio in t tra parentesi tonde contiene come termine più alto in t un t^{k-1} perché il termine t^k si cancella. Per cui, in generale,

$$(D-\lambda)P_k(t)\lambda^t = P_{k-1}(t)\lambda^t\,,$$

dove $P_k(t)$ è un polinomio di grado k in t. Questa osservazione ci permette di risolvere il nostro problema, perché, si ha

$$\begin{aligned}
(D-\lambda)\lambda^t = 0 \quad &\to \quad x_t^{(1)} = \lambda^t\,,\\
(D-\lambda)t\lambda^t = \lambda\lambda^t = \lambda x_t^{(1)} \quad &\to \quad x_t^{(2)} = t\lambda^t\,,\\
(D-\lambda)t^2\lambda^t = (2t\lambda\lambda^t + \lambda\lambda^t) = 2\lambda x_t^{(2)} + \lambda x_t^{(1)} \quad &\to \quad x_t^{(3)} = t^2\lambda^t\,,\\
&\vdots\\
(D-\lambda)t^{k-1}\lambda^t = P_{k-2}(t)\lambda^t \quad &\to \quad x_t^{(k)} = t^{k-1}\lambda^t\,.
\end{aligned}$$

In sostanza, applicando $(D-\lambda)$ a $x_t^{(\ell)} = t^{\ell-1}\lambda^t$, con $1 \le \ell \le k$, si ottiene una combinazione lineare di termini in $x_t^{(i)}$ con $i < \ell$ che verranno annullati dall'operatore $(D-\lambda)^{\ell-1}$.

Equazioni differenziali La prima equazione della catena la abbiamo già risolta ottenendo $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)x^{(1)}(t)=0$ se $x^{(1)}(t)=e^{\lambda t}$, per cui la prima equazione nuova da risolvere è

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)x^{(2)}(t)=x^{(1)}(t)=e^{\lambda t}\,.$$

Ovviamente non possiamo scegliere $x^{(2)}(t)=e^{\lambda t}$ perché si avrebbe $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)x^{(2)}(t)=0$. D'altra parte, la soluzione dovrà comunque avere un termine esponenziale del tipo $x^{(2)}(t)\sim e^{\lambda t}$ perché l'equazione ha come termine non omogeneo proprio $e^{\lambda t}$.
Anche in questo caso valuteremo l'azione dell'operatore $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)$ su funzioni del tipo $x(t)=t^k e^{\lambda t}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)x(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)t^k e^{\lambda t}=kt^{k-1}e^{\lambda t}+\lambda t^k e^{\lambda t}-\lambda t^k e^{\lambda t}=kt^{k-1}e^{\lambda t}\,.$$

Similmente al caso precedente, l'azione di $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)$ su $x(t)=t^k e^{\lambda t}$, abbassa di un grado il termine del polinomio t^k, e quindi, come sopra,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)P_k(t)e^{\lambda t}=P_{k-1}(t)e^{\lambda t}\,.$$

Similmente al caso precedente, questa osservazione ci permette di risolvere il nostro problema, perché, si ha

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)e^{\lambda t}=0 \;\;\to\;\; x^{(1)}(t)=e^{\lambda t}\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)te^{\lambda t}=e^{\lambda t}=x^{(1)}(t) \;\;\to\;\; x^{(2)}(t)=te^{\lambda t}\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)t^2e^{\lambda t}=2te^{\lambda t}=2x^{(2)}(t) \;\;\to\;\; x^{(3)}(t)=t^2e^{\lambda t}\,,$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)t^{k-1}e^{\lambda t}=(k-1)t^{k-2}e^{\lambda t}=(k-1)x^{(k-1)}(t) \;\;\to\;\; x^{(k)}(t)=t^{k-1}e^{\lambda t}\,.$$

Come nel caso delle equazioni alle differenze, ma questa volta in maniera addirittura più semplice, applicando $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)$ a $x^{(\ell)}(t)=t^{\ell-1}e^{\lambda t}$ si ottiene un termine proporzionale a $x^{(\ell-1)}(t)$ che verrà annullato dall'operatore $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda\right)^{\ell-1}$.

λ_i complessi coniugati

In questo caso, se restassimo nel campo complesso non ci sarebbero problemi ed avremo come soluzioni $x_t = (\lambda)^t$ (ovvero $x(t) = e^{\lambda t}$ nel caso delle equazioni differenziali) con λ complesso. Però, visto che cerchiamo la dinamica di variabili associate a sistemi reali, ci piacerebbe avere soluzioni reali e non complesse. Quindi, dobbiamo combinare le due soluzioni complesse coniugate per ottenere due soluzioni reali.

Equazioni alle differenze Si hanno due soluzioni complesse coniugate associate alle due radici complesse coniugate: $x_t^{(1)} = (\lambda)^t$ e $x_t^{(2)} = (\bar{\lambda})^t$, dove $\lambda = a + ib$ e $\bar{\lambda} = a - ib$. Se scriviamo i numeri complessi λ e $\bar{\lambda}$ in rappresentazione trigonometrica, abbiamo:

$$\lambda = a + ib = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \quad \bar{\lambda} = a - ib = \rho(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$

perché trasformare un numero nel suo complesso coniugato equivale a cambiare segno al suo angolo. Ora, sfruttando la relazione di De Moivre si ha che

$$x_t^{(1)} = (\lambda)^t = \rho^t(\cos(\theta t) + i\sin(\theta t))$$

$$x_t^{(2)} = (\bar{\lambda})^t = \rho^t(\cos(\theta t) - i\sin(\theta t))$$

per cui possiamo facilmente combinare $x_t^{(1)}$ ed $x_t^{(2)}$ per ottenere due soluzioni reali ed indipendenti:

$$x_t^{(1)_r} = \frac{x_t^{(1)} + x_t^{(2)}}{2} = \rho^t \cos(\theta t)$$

$$x_t^{(2)_r} = \frac{x_t^{(1)} - x_t^{(2)}}{2i} = \rho^t \sin(\theta t)) \, .$$

Se le radici complesse coniugate sono a molteplicità algebrica maggiore di 1, si avranno anche altre soluzioni di base con $x_t^r = t^k \rho^t \cos(\theta t)$ e $x_t^r = t^k \rho^t \sin(\theta t)$ con $k = 0...(\mathrm{ma}(\lambda) - 1)$.

Equazioni differenziali Anche in questo caso si hanno due soluzioni complesse coniugate associate alle due radici complesse coniugate: $x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}$ e $x^{(2)}(t) = e^{\bar{\lambda} t}$. In questo caso la ricerca di due soluzioni reali è più semplice perché non si deve passare in rappresentazione trigonometrica, ma si usa solo la formula di Eulero:

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$$

$$x^{(2)}(t) = e^{\bar{\lambda} t} = e^{(a-ib)t} = e^{at}(\cos(bt) - i\sin(bt)) \, .$$

Anche in questo caso riusciamo facilmente a combinare $x^{(1)}(t)$ ed $x^{(2)}(t)$ per ottenere due soluzioni reali ed indipendenti:

$$x^{(1)_r}(t) = \frac{x^{(1)}(t) + x^{(1)}(t)}{2} = e^{at} \cos(bt)$$

$$x^{(2)_r}(t) = \frac{x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)}{2i} = e^{at}\sin(bt)\,.$$

Se le radici complesse coniugate sono a molteplicità algebrica maggiore di 1, si avranno anche altre soluzioni di base con $x_t^r = t^k e^{at}\cos(bt)$ e $x_t^r = t^k e^{at}\sin(bt)$ con $k = 0...(\mathrm{ma}(\lambda) - 1)$.

1.2.6 Base dello spazio delle soluzioni

Quindi, la soluzione dell'equazione (1.18) sarà data dalla combinazione lineare degli elementi di base dei nuclei degli operatori $(L - \lambda_i)^{\alpha_i}$ per ogni i e per ogni tipologia di λ_i:

	Equazioni alle differenze	Equazioni differenziali
λ reale con $\mathrm{ma}(\lambda) = 1$	$x_t^{(1)} = \lambda^t$	$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}$
λ reale con $\mathrm{ma}(\lambda) = k > 1$	$x_t^{(1)} = \lambda^t$ $x_t^{(2)} = t\lambda^t$ $x_t^{(3)} = t^2\lambda^t$ $\vdots$ $x_t^{(k)} = t^{k-1}\lambda^t$	$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}$ $x^{(2)}(t) = te^{\lambda t}$ $x^{(3)}(t) = t^2 e^{\lambda t}$ $\vdots x^{(k)}(t) = t^{k-1}e^{\lambda t}$
λ complessi coniugati con $\mathrm{ma}(\lambda) = 1$	$x_t^{(1)} = \rho^t\cos(\theta t)$ $x_t^{(2)} = \rho^t\sin(\theta t)$	$x^{(1)}(t) = e^{at}\cos(bt)$ $x^{(2)}(t) = e^{at}\sin(bt)$
λ complessi coniugati con $\mathrm{ma}(\lambda) = k > 1$	$x_t^{(1)} = \rho^t\cos(\theta t)$ $x_t^{(2)} = \rho^t\sin(\theta t)$ $x_t^{(3)} = t\rho^t\cos(\theta t)$ $x_t^{(4)} = t\rho^t\sin(\theta t)$ $x_t^{(5)} = t^2\rho^t\cos(\theta t)$ $x_t^{(6)} = t^2\rho^t\sin(\theta t)$ $\vdots$ $x_t^{(2k-1)} = t^{k-1}\rho^t\cos(\theta t)$ $x_t^{(2k)} = t^{k-1}\rho^t\sin(\theta t)$	$x^{(1)}(t) = e^{at}\cos(bt)$ $x^{(2)}(t) = e^{at}\sin(bt)$ $x^{(3)}(t) = te^{at}\cos(bt)$ $x^{(4)}(t) = te^{at}\sin(bt)$ $x^{(5)}(t) = t^2e^{at}\cos(bt)$ $x^{(6)}(t) = t^2e^{at}\sin(bt)$ $\vdots$ $x_t^{(2k-1)} = t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$ $x_t^{(2k)} = t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$

1.3 Dinamiche lineari a coefficienti costanti non omogenee

Finora ci siamo occupati di trovare tutte le soluzioni di equazioni del tipo (1.18), ossia dinamiche lineari omogenee a coefficienti costanti di qualsiasi grado:

$$(a_n L^n + a_{n-1}L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0)x = 0\,.$$

Per tali equazioni, lo spazio delle soluzioni è identificato dal nucleo dell'operatore $\phi = (a_n L^n + a_{n-1}L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0)$ e la soluzione dell'equazione differenziale o alle differenze consiste nel determinare una base completa del nucleo di ϕ. In questa sezione ci occuperemo di una classe particolare di problemi non omogenei del tipo:

$$\phi(x) = b$$

dove b è una funzione del tempo (come variabile continua o discreta). Come abbiamo già visto per il teorema di Rouche-Capelli, ogni soluzione di questo problema si può trovare sommando ad una soluzione particolare di $\phi(x) = b$ tutti gli elementi del nucleo di ϕ, quindi lo spazio delle soluzioni avrà dimensione pari alla dimensione del nucleo di ϕ. Infatti, sia x^p una soluzione particolare di $\phi(x) = b$ e x un'altra soluzione qualsiasi, allora la loro differenza apparterrà al nucleo di ϕ:

$$\phi(x - x^p) = \phi(x) - \phi(x^p) = b - b = 0\,,$$

e quindi una qualsiasi soluzione x potrà essere scritta come $x = x^p + x^k$ dove $x_k = x - x^p$ è un qualsiasi vettore del nucleo di ϕ. Quindi, per risolvere $\phi(x) = b$ dobbiamo prima risolvere $\phi(x) = 0$, ossia dobbiamo prima determinare il nucleo di ϕ, e quindi dobbiamo trovare una sola soluzione particolare del problema $\phi(x) = b$. La soluzione generale sarà data dalla soluzione particolare sommata al nucleo di ϕ.

1.3.1 Il metodo delle somiglianze

Trovare una soluzione particolare x_p tale che $\phi(x_p) = b$ per una funzione b generica dipendente dal tempo può essere anche molto complicato. In questo paragrafo studieremo un metodo molto semplice che ci permetterà di trovare la soluzione particolare per alcune forme specifiche di b. Le forme a cui ci riferiamo sono tutte quelle che possono appartenere al nucleo di un possibile ϕ. Per rendere più chiaro questo concetto, riprendiamo la rappresentazione in fattori dell'operatore ϕ:

$$\phi = a_n \left(\prod_{i=1}^{m} (L - \lambda_i)^{\alpha_i} \right) .$$

Quando cerchiamo le soluzioni $\phi(x) = 0$ cerchiamo gli elementi del nucleo di ϕ ossia gli elementi del nucleo di $(L - \lambda_i)^{\alpha_i}$ per ogni i. I termini di non-omogeneità, b, che considereremo sono solo quelli che possono essere elementi del nucleo di $(L - \lambda)^{\alpha}$ per qualche valore di λ e α.

Esempio 1.3.1.

a) *La funzione $b_t = t2^t$ può appartenere al nucleo di un qualche operatore del tipo $(D - \lambda)^{\alpha}$? Si, se $\lambda = 2$ e se $\alpha = 2$.*

b) *La funzione $b(t) = 1 + t^2$ può appartenere al nucleo di un qualche operatore del tipo $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda\right)^{\alpha}$? Si, se $\lambda = 0$ e se $\alpha = 3$.*

c) *La funzione* $b(t) = t\sin(t)$ *può appartenere al nucleo di un qualche operatore del tipo* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda\right)^\alpha$*? Si, se* $\lambda = \pm i$ *e se* $\alpha = 2$.

È valido il seguente teorema:

Theorem 1.3.2. *Sia data l'equazione dinamica di ordine* n

$$(a_n L^n + a_{n-1} L^{n-1} + \cdots + a_1 L^1 + a_0)x = b\,.$$

Se b *appartiene al nucleo dell'operatore* $(L-\lambda)^\alpha$ *per qualche valore di* λ *ed* α*, allora anche la soluzione particolare* x_p *sarà un elemento del nucleo del medesimo operatore. Se, per coincidenza,* λ *è anche radice del polinomio caratteristico associato all'equazione dinamica, allora la soluzione particolare andrà ricercata negli elementi del nucleo dell'operatore* $(L-\lambda)^\alpha$ *moltiplicati per* $t^{\mathrm{ma}(\lambda)}$ *dove* $ma(\lambda)$ *è la molteplicità algebrica della radice* λ *nel polinomio caratteristico.*

Esempio 1.3.3. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x'' + 2x' + x = 1 + e^{-t}\,.$$

Cerchiamo prima le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$x'' + 2x' + x = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato sarà pari a

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \to \qquad (\lambda+1)^2 = 0 \qquad \to \qquad \lambda = -1 \quad con\ ma(-1) = 2\,.$$

Quindi

$$x'' + 2x' + x = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^2 x(t) = 0\,.$$

Siamo nel caso di autovalori reali e coincidenti, e pertanto le soluzioni saranno

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}\,.$$

Adesso andiamo a guardare il termine di non omogeneità:

$$b(t) = 1 + e^{-t}\,.$$

Esso è composto dalla somma di due termini, 1 *che puo essere associato a* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda\right)$ *con* $\lambda = 0$ *e* e^{-t} *che puo essere associato a* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda\right)$ *con* $\lambda = -1$*. Quindi, la soluzione particolare sarà la somma di due contributi:*

$$x_p(t) = a + bt^2 e^{-t}$$

dove $x_p^1 = a$ *è l'elemento generico del nucleo di* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ *(visto che* $(\lambda = 0)$*) e* $x_p^2 = be^{-t}$ *è l'elemento generico del nucleo di* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)$ *(visto che* $(\lambda = -1)$*) che deve essere* *moltiplicato per* t^2 *perchè* $\lambda = -1$ *è anche radice del polinomio caratteristico con molteplicità* 2. *Se sostituiamo la soluzione particolare nell'equazione di partenza otteniamo:*

$$x_p'' + 2x_p' + x_p = 2be^{-t} - 4bte^{-t} + bt^2e^{-t} - 2bt^2e^{-t} + 4bte^{-t} + bt^2e^{-t} + a\,.$$

Semplificando, ed uguagliando al termine di non omogeneità $1 + e^{-t}$ *si ottiene*

$$2be^{-t} + a = 1 + e^{-t}\,,$$

che implica $b = 1/2$ *ed* $a = 1$. *Infine la soluzione generale dell'equazione differenziale sarà:*

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + 1 + \frac{t^2}{2}e^{-t}\,.$$