Università LUISS Guido Carli, A.A. 2010-2011 (II semestre)

Metodi Matematici per la Finanza

Dott. Davide Vergni

Numeri Complessi

Indice

Capitolo 1

Numeri complessi

1.0.1 Obiettivi principali del capitolo

In questo capitolo verranno discussi gli elementi fondanti dell'algebra dei numeri complessi. Si tratta di una semplice introduzione alle regole di calcolo dei numeri complessi che utilizzeremo nella teoria degli operatori lineari e delle equazioni differenziali.

1.0.2 Notazione

I numeri complessi sono rappresentati da lettere italiche minuscole del fondo dell'alfabeto (z, w per esempio). i rappresenta l'unità immaginaria.

1.1 I numeri complessi

I numeri complessi vengono introdotti nel XVI secolo per la soluzione delle equazioni algebriche di terzo grado. Fu Cartesio nel XVII secolo a chiamarli immaginari e Eulero e De Moivré a fornire le basi teoriche per il calcolo moderno con i numeri complessi. Grazie a Gauss nel XVIII secolo i numeri complessi acquisirono universale importanza nel mondo della matematica.

1.1.1 Prima definizione di numero complesso

Un numero complesso z è composto di due parti ben distinte, una parte reale e una parte immaginaria:

$$z = a + ib \tag{1.1}$$

dove, ovviamente, a è la parte reale e ib è la parte immaginaria. a e b sono dei numeri reali, anche indicati come coefficienti della parte reale ($a =$Re z) e della parte immaginaria ($b =$Im z). Per quanto riguarda la i, l'unità immaginaria, valgono le seguenti regole di calcolo:

p1) $\forall a \in \mathbb{R} \qquad (a) \cdot (i) = ai = ia$

p2) $(i) \cdot (i) = i^2 = -1$

Con l'introduzione dell'unità immaginaria e delle due semplici regole di calcolo appena mostrate che ampliano le usuali regole di calcolo dell'algebra dei numeri reali, si riescono a risolvere una serie di problemi algebrici che non possono aver soluzione nel campo dei numeri reali.

Esempio 1.1.1. *L'equazione* $x^2+4=0$ *(in buona compagnia ad altre numerosissime equazioni algebriche) non ha soluzione nel campo reale.*
Nel campo complesso $z^2+4=0$ *ci fornisce:*

$$(a+ib)^2+4=0 \qquad a^2+2abi+i^2b^2+4=0 \qquad a^2+2abi-b^2+4=0$$

L'ultima uguaglianza (ottenuta sfruttando la proprietà p2) ha una soluzione semplice che si ottiene ponendo $a=0$ *(in modo da eliminare la parte immaginaria dell'espressione) e* $b=\pm 2$ *(dalla soluzione di* $-b^2+4=0$*) e che porta a* $z=\pm 2i$ *come soluzioni dell'equazione* $z^2+4=0$*.*
Come sempre accade nel calcolo algebrico e in particolare nel calcolo con i numeri complessi, esistono vari modi per arrivare alla soluzione di un'equazione. La proprietà p2), $i^2=-1$ *è del tutto equivalente a* $i=\sqrt{-1}$*. Pertanto:*

$$z^2+4=0 \qquad z^2=-4 \qquad z=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{(-1)(4)}=\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}=\pm 2i\,.$$

Nella precedente relazione abbiamo generalizzato la nota regola del prodotto delle radici $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ *al caso in cui* $a<0$*.*

1.1.2 Operazioni con i numeri complessi

Con i numeri complessi è possibile effettuare varie operazioni alcune semplici e naturali mentre altre del tutto peculiari acquisteranno significato man mano che andremo avanti con l'esposizione della teoria. Le operazioni di base (somma e prodotto) sono una banale estenzione delle analoghe operazioni per i numeri reali. Le ridefiniremo però in maniera rigorosa.

Somma: La somma tra due numeri complessi è definita secondo le usuali regole dei numeri reali, facendo attenzione a mantenere separate parte reale e parte immaginaria.

Definizione 1.1.2. *Presi due qualsiasi numeri complessi* z_1*,* $z_2 \in \mathbb{C}$*, definiamo il numero complesso* $w \in \mathbb{C}$ *somma di* z_1 *e* z_2

$$w = z_1 + z_2 = (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = a_1+a_2+i(b_1+b_2). \tag{1.2}$$

Le proprietà della somma così definite sono

s1) Associatività: $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$$

s2) Commutatività: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$

s3) Esistenza dell'elemento neutro: $\exists!\, 0 \in \mathbb{C} \,|\, \forall\, z \in C$:

$$z + 0 = 0 + z = z$$

s4) Esistenza dell'elemento opposto: $\forall\, z \in \mathbb{C}\ \exists!\,(-z) \in \mathbb{C}$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Il numero complesso 0 è pari a $0 = 0 + i0$.

Esempio 1.1.3. *Dati due numeri complessi* $z_1 = i - 5$ *e* $z_2 = 1 - 2i$ *ne effettuiamo la somma:*

$$z_1 + z_2 = (i-5) + (1-2i) = (-5+i) + (1-2i) = (-5+1) + i(1-2) = -4 - i.$$

Prodotto: Anche il prodotto tra i numeri complessi è definito secondo le usuali regole dei numeri reali, facendo attenzione solo al fatto che $i \cdot i = -1$.

Definizione 1.1.4. *Presi due qualsiasi numeri complessi* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, *definiamo il numero complesso* $w \in \mathbb{C}$ *prodotto di* z_1 *e* z_2*:*

$$\begin{aligned} w = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + ib_1ib_2 = \\ = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le proprietà del prodotto così definite sono

p1) Associatività: $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$$

p2) Commutatività: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

p3) Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto: $\exists!\, 1 \in \mathbb{C} \,|\, \forall\, z \in C$:

$$(z)(1) = (1)(z) = z$$

p4) Esistenza dell'elemento inverso: $\forall\, z \neq 0 \in \mathbb{C}\ \exists!\, z^{-1} = \dfrac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + i\dfrac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2} \in \mathbb{C}$

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1$$

Il numero complesso 1 è pari a $1 + i0$ e nel seguito dimostreremo anche la formula per calcolare l'inverso.

Esempio 1.1.5. *Dati due numeri complessi* $z_1 = i - 5$ *e* $z_2 = 1 - 2i$ *ne effettuiamo il prodotto:*

$$z_1z_2 = (i-5)(1-2i) = i - 2i^2 - 5 + 10i = i - 2(-1) - 5 + 10i = i + 2 - 5 + 10i = -3 + 11i.$$

A partire dal prodotto è possibile definire il rapporto tra due numeri complessi z_1 e z_2 moltiplicando il primo per l'inverso del secondo:

$$w = z_1/z_2 = z_1 z_2^{-1} = (a_1 + ib_1)\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Introduciamo anche alcune importanti operazioni che non sono definite per i numeri reali.

Coniugazione complessa:

Definizione 1.1.6. *Dato un qualsiasi numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo il numero complesso $w = \bar{z} \in \mathbb{C}$ come il complesso coniugato di z*

$$w = \bar{z} = a - ib. \tag{1.4}$$

L'operazione è molto semplice e consiste nel cambiare il segno della parte immaginaria. Le proprietà del complesso coniugato così definito sono

c1) Distributività rispetto alla somma: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

c2) Distributività rispetto al prodotto: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

c3) Annullamento della coniugazione: $\forall\, z \in \mathbb{C}$:

$$\bar{\bar{z}} = z$$

c4) Coniugazione dei numeri reali: $\forall\, z \in \mathbb{C}$:

$$\bar{z} = z \iff \mathrm{Im} z = 0$$

Notiamo che il prodotto tra un numero complesso e il suo complesso coniugato dà sempre luogo a una quantità reale e positiva: $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - aib + iba - i^2b^2 = a^2 + b^2$, a cui daremo interpretazione nel seguito. A partire dal complesso coniugato è possibile calcolare l'inverso di un numero complesso attraverso un processo di razionalizzazione che è simile a quello utilizzato nell'algebra dei radicali fratti:

$$\begin{gathered} z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \\ \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \end{gathered} \tag{1.5}$$

che è esattamente l'inverso del numero complesso definito dalla proprietà p4).

Modulo e fase: Il modulo e la fase di un numero complesso sono due quantità reali definite per ogni numero complesso. Il modulo viene anche chiamato "intensità" o "ampiezza" mentre la fase "argomento".

Definizione 1.1.7. *Dato un qualsiasi numero complesso* $z = a + ib \in \mathbb{C}$*, definiamo il numero reale modulo (o ampiezza) di* z *come* $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definizione 1.1.8. *Dato un qualsiasi numero complesso* $z = a + ib \in \mathbb{C}$*, definiamo il numero reale fase (o argomento) di* z *come* $arg(z) = \theta = \arctan \frac{b}{a}$.

Qui facciamo notare solo come il modulo possa essere ottenuto a partire dal prodotto del numero complesso in esame con il suo complesso coniugato: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. La proprietà fondamentale dell'operazione di modulo è la seguente: dati due numeri complessi z_1 e z_2 si ha che $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, mentre per quanto riguarda la fase di ha $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. Per l'interpretazione di modulo e fase e per la dimostrazione di queste proprietà rimandiamo il lettore al paragrafo 1.2.2.

1.2 Rappresentazioni dei numeri complessi

Possiamo pensare che gli oggetti matematici e le loro relazioni siano degli ideali Platonici (e quindi esistano a prescindere dal fatto che noi ci occupiano di loro) e il nostro modo di "scriverli" (ossia di rappresentarli) sia un insieme di segni convenzionali per riferirci a loro. Così un punto su una retta o la scritta "4" o "IV" o quattro fagioli possono rappresentare lo stesso ente matematico (il numero intero 4).
I numeri complessi sono tra gli oggetti matematici che hanno più tipi di rappresentazioni "importanti" (ossia con un certo valore matematico) ognuna delle quali viene sfruttata per le sue proprietà di versatilità per un determinato tipo di operazioni.

1.2.1 Rappresentazione algebrica

La rappresentazione algebrica dei numeri complessi è la prima che viene introdotta ed è quella che abbiamo già visto, ossia $z = a + ib$.
Nella teoria moderna dei numeri complessi spesso si preferisce darne una versione assiomatica un po' più astratta:

Definizione 1.2.1. *Definiamo numero complesso* z *una coppia ordinata di numeri reali* (a, b)*, chiamando* a *coefficiente della parte reale e* b *coefficiente della parte immaginaria. Definiamo le seguenti regole di composizione interna (operazioni) tra i numeri complessi:*

Somma: *un'operazione che associa a due numeri complessi* $z_1 = (a_1, b_1)$ *e* $z_2 = (a_2, b_2)$ *un terzo numero complesso* w *definito come*

$$w = z1 + z2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\,.$$

Tale operazione verifica le proprietà di associatività, esistenza dell'elemento neutro $(0 = (0, 0))$ *ed esistenza dell'inverso* $(z_2 = -z_1 = (-a_1, -b_1))$.

Prodotto: *un'operazione che associa a due numeri complessi* $z_1 = (a_1, b_1)$ *e* $z_2 = (a_2, b_2)$ *un terzo numero complesso* w *definito come*

$$w = z1z2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\,.$$

Tale operazione verifica le proprietà di associatività, esistenza dell'elemento neutro $(0 = (1, 0))$ *ed esistenza dell'inverso* $\left(\forall z_1 \neq 0,\ z_2 = z_1^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)\right)$.

Anche se la definizione astratta e le operazioni appena introdotte possono sembrare inutilmente complicate, ai fini del calcolo sono del tutto equivalenti alla rappresentazione $z = a + ib$. Infatti si può facilmente verificare che le operazioni definite nel paragrafo 1.1.2 sono esattamente equivalenti (per quanto riguarda la parte reale e la parte immaginaria) alle operazioni appena definite.

La rappresentazione algebrica viene utilizzata soprattutto nella equazioni algebriche semplici, in cui cioè compaiono prevalentemente somme e differenze di numeri complessi con esponente intero, positivo e "piccolo":

Esempio 1.2.2. *Risolviamo l'equazione* $z^2 + iz + 2 = 0$*:*

$$z^2 + iz + 2 = (a + ib)^2 + i(a + ib) + 2 = a^2 + i2ab - b^2 + ia - b + 2 =$$

$$= a^2 - b^2 - b + 2 + i(2ab + a) = 0\,.$$

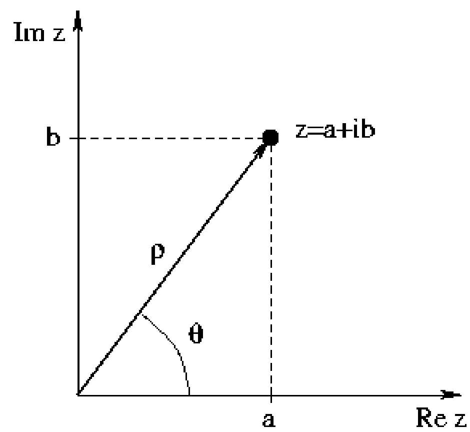
Nella trattazione dell'equazione abbiamo effettuato tutti i calcoli necessari a separare la parte reale dalla parte immaginaria. Questo è un procedimento spesso necessario nella soluzione di equazioni che coinvolgono i numeri complessi. Lo 0 *che compare a destra dell'uguaglianza è il numero complesso* 0 *ossia* $0 + i0$*. Per cui, per verificare l'uguaglianza dobbiamo imporre che la parte reale e la parte immaginaria a primo membro siano entrambi pari a* 0*. Questo porta alla soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} Re(z^2 + iz + 2) = 0 \\ Im(z^2 + iz + 2) = 0 \end{cases} = \begin{cases} a^2 - b^2 - b + 2 = 0 \\ 2ab + a = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione solo se $a = 0$*, che inserito nella prima equazione fornisce* $b^2 + b - 2 = 0$ *con soluzione* $b_1 = 2$ *e* $b_2 = -1$*. Pertanto, le soluzioni dell'equazione* $z^2 + iz + 2 = 0$ *sono* $z_1 = 2i$ *e* $z_2 = -i$*.*

1.2.2 Rappresentazione geometrica (o vettoriale)

Un'idea semplice ma brillante sulla rappresentazione dei numeri complessi è dovuta a Gauss e Argand che (indipendentemente) nel XVIII secolo hanno ideato quello che viene oggi chiamato "Piano di Argand-Gauss": visto che ogni numero complesso è identificato dai due coefficienti (reali) della parte reale e della parte immaginaria, è possibile mettere in relazione ogni numero complesso con un punto del piano nel quale fissiamo un sistema ortogonale di assi cartesiani. Quindi, sull'asse delle x rappresentiamo la parte reale e sull'asse delle y la parte immaginaria del numero complesso. In questo modo possiamo associare ogni numero complesso uno e un solo punto (o vettore) del piano di Argand-Gauss.



Alcune considerazioni:

1. la regola della somma di numeri complessi è equivalente alla regola del parallelogramma per la somma di vettori nel piano complesso;

2. l'operazione di modulo $\rho = |z|$ su un numero complesso restituisce l'ampiezza del vettore che lo rappresenta nel piano complesso;

3. l'operazione di fase $\theta = \arg(z)$ invece restituisce l'angolo che il vettore che lo rappresenta nel piano complesso forma con l'asse delle x (Re z).

4. Le leggi di passaggio da coordinate cartesiane a coordinate **polari** (come vengono chiamate le coordinate ρ e θ) sono descritte attraverso le trasformazioni

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases} \tag{1.6}$$

5. La rappresentazione in termini di (ρ, θ) non è univoca in quanto θ può variare di multipli interi di 2π senza che il numero complesso cambi. Quindi, usualmente si considera $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Inoltre $\rho = 0$ e θ qualsiasi designa sempre lo stesso numero complesso $z = 0$.

6. La funzione $\arctan x$ ha come codominio l'insieme $[-\pi/2, \pi/2]$ (codominio esteso comprendente anche i limiti per $x \to -\infty$ e $x \to \infty$). Quindi, per non rappresentare con le trasformazioni di destra delle equazioni (1.6) solo numeri complessi del primo e del quarto quadrante ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$), queste trasformazioni vanno leggermente estese in modo che se si parte con un numero complesso a parte reale negativa, al risultato dell'operazione di arcotangente deve essere aggiunto π:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & \text{se} \quad a \geq 0 \\ \\ \arctan\dfrac{b}{a} + \pi & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

1.2.3 Rappresentazione trigonometrica

Nella rappresentazione algebrica scriviamo un qualsiasi numero complesso come $z = a + ib$. Sfruttando la rappresentazione geometrica si osserva che ogni elemento (o vettore) del piano complesso, z, può essere identificato o dalle sue coordinate cartesiane (a, b) oppure dalla sue coordinate polari (ρ, θ). Quindi il numero complesso $z = a + ib$ lo possiamo scrivere in rappresentazione come

$$z = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \tag{1.7}$$

avendo sostituito l'espressione delle coordinate cartesiane (trasformazione di sinistra nell'equazione (1.6)) nella rappresentazione algebrica del numero complesso. Un primo esempio dell'utilità della rappresentazione polare è fornito dalla formula di De Moivré:

$$z^n = (\rho(\cos\theta + i \sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)\,. \tag{1.8}$$

Ma, in generale, qualsiasi operazione di prodotto o rapporto di numeri complessi viene ad essere enormemente semplificata dall'utilizzo della rappresentazione trigonometrica. Infatti valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

che possono essere ottenute mediante l'utilizzo delle formule trigonometriche di addizione e sottrazione di angoli. Queste relazioni giustificano sia il teorema di De Moivré sia le proprietà di modulo e fase per i numeri complessi presentate nel paragrafo 1.1.2.

1.2.4 Rappresentazione esponenziale

Questa rappresentazione si basa sull'equazione di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{1.10}$$

che lega l'esponenziale di un numero immaginario alla rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi. La dimostrazione di questa formula si ricava per mezzo di calcoli algebrici a partire dallo sviluppo in serie di Taylor del coseno e del seno che vengono ricombinati a comporre lo sviluppo in serie dell'esponenziale. A partire dalla formula di eulero un numero complesso $z = a + ib$ lo possiamo scrivere come:

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + \sin\theta) = \rho e^{i\theta} \tag{1.11}$$

dove le relazioni tra a, b, ρ e θ sono date dalle formule (1.6).

Utilizzando la rappresentazione esponenziale è estremamente semplice ricavare sie le formule di De Moivre che quelle relative al prodotto o al rapporto di numeri complessi.

La rappresentazione esponenziale viene utilizzata soprattutto per risolvere equazioni in cui sono presenti principalmente operazioni di prodotto, divisione e potenze:

Esempio 1.2.3. *Risolviamo l'equazione* $\frac{iz^3}{\bar{z}^4} = \frac{2}{\sqrt{-z}}$. *Prima di tutto esprimiamo tutte le quantità presenti in questa espressione in notazione esponenziale:*

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}\,,\; z = \rho e^{i\theta}\,,\; \bar{z} = \rho e^{-i\theta}\,,\; 2 = 2e^{i0}\,,\; -1 = e^{i\pi}$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$\frac{e^{i\pi/2}\rho^3 e^i 3\theta}{\rho^4 e^{-i4\theta}} = \frac{2}{(e^{i\pi}\rho e^{i\theta})}$$

$$\frac{e^{i(7\theta+\pi/2)}}{\rho} = \frac{2e^{-i(\theta+\pi)/2}}{\sqrt{rho}}$$

$$e^{i(7\theta+\pi/2)} = 2\sqrt{rho}e^{-i(\theta+\pi)/2}$$

Uguagliando modulo e fase delle quantità ai due membri, otteniamo

$$\begin{cases} 1 = 2\sqrt{\rho} \\ 7\theta + \frac{\pi}{2} = -\frac{\theta+\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} \rho = \frac{1}{4} \\ \theta = -\frac{\pi}{15} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $z = e^{i\pi/15}/4$.

1.3 Equazioni algebriche e il teorema fondamentale dell'algebra

Definizione 1.3.1. *Si dice equazione algebrica un'espressione polinomiale a coefficienti reali (o complessi) in un'incognita* x *uguagliata a zero:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1.12}$$

dove $a_i \in \mathbb{C}$ *per* $i = 0 \cdots n$ *e* n *è detto* **grado** *dell'equazione.*

Ovviamente qualsiasi espressione semplificabile o in qualche modo riducibile a un'equazione del tipo (1.12) viene detta equazione algebrica.

Il calcolo delle radici (ossia degli zeri) delle equazioni algebriche, o, analogamente, il problema della fattorizzazione dei polinomi, viene affrontato già nelle scuole medie, ma è solo con l'introduzione dei numeri complessi che ne possiamo dare una risposta completa e definitiva.

Theorem 1.3.2 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Un'equazione algebrica di grado* n *ammette* n *soluzioni (alcune delle quali possono essere ripetute) nel campo complesso.*

La dimostrazione di questo teorema (data la prima volta da Gauss nel 1799) esula dagli scopi di questo capitolo, però lo studente interessato può riferirsi a [].

Questo teorema è non costruttivo, nel senso che non ci dice come fare a trovare le radici di un'equazione algebrica (operazione semplice nel caso in cui $n = 1, 2$; operazione un po' più complicata se $n = 3, 4$, operazione impossibile (tranne pochi casi semplici) se $n \geq 5$) però afferma che tali soluzioni esistono.

1.3.1 Fattorizzazione dei polinomi

Una delle possibili applicazioni del teorema fondamentale del calcolo, come già citato, riguarda la fattorizzazione dei polinomi.

Definizione 1.3.3. *Dato un polinomio di grado n in $z \in \mathbb{C}$ a coefficienti complessi*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \qquad con \qquad a_j \in \mathbb{C}\,, \tag{1.13}$$

e indicando con z_i le n radici dell'equazione $P_n(z) = 0$, chiamiamo **fattorizzazione** *di $P_n(z)$ l'espressione*

$$P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)\,. \tag{1.14}$$

Se indichiamo con m il numero di radici non ripetute e con α_i il numero di volte in cui la radice z_i è ripetuta, possiamo scrivere

$$P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)^{\alpha_i}\,. \tag{1.15}$$

α_i è anche detta **molteplicità algebrica**, *e vale la seguente identità*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$$

La fattorizzazione permette di esprimere un polinomio di grado n nel prodotto di n monomi. È assolutamente equivalente fattorizzare un polinomio o trovarne tutti gli zeri. Le applicazioni della fattorizzazione sono molteplici, e vanno dalla semplificazione di espressioni algebriche fratte, alla soluzione degli integrali.

Esempio 1.3.4. *Per la fattorizzazione del polinomio $x^3 - 1 = 0$ è evidente la radice reale $x = 1$. Quindi possiamo scrivere $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Il polinomio di secondo grado che resta da semplificare non è scomponibile nel campo reale (il discriminante della formula risolutiva per il calcolo degli zeri delle equazioni di secondo grado è minore di zero). Ma è scomponibile nel campo complesso:*

$$z_{1,z} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

E quindi

$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1.3.2 Radici dell'unità

Un'equazione algebrica particolarmente semplice e sempre risolvibile è

$$x^n = 1\,.$$

Nel campo dei numeri reali si ha una sola soluzione, $x = 1$, se n è dispari, e due soluzioni, $x = \pm 1$, se n è pari. Il teorema fondamentale dell'algebra ci dice che l'equazione algebrica

$$z^n = 1 \to z^n - 1 = 0$$

deve però avere n soluzioni nel campo complesso. Vediamo come fare per trovarle. Esprimiamo z e 1 in rappresentazione esponenziale:

$$z^n = 1 \qquad \to \qquad \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = e^{i0} \, .$$

Come abbiamo già osservato, la notazione trigonometrica e quella esponenziale, visto che dipendono dalla fase θ, non sono univoche, in quanto $\theta = \theta + 2\pi = \theta + 2k\pi$ dove k può essere un qualsiasi numero intero. Nella maggioranza dei casi questa ambiguità può tranquillamente non essere presa in considerazione, ma nei casi in cui si deve effettuare un'operazione di estrazione di radice (come nell'equazione $z^n = 1 \to z = \sqrt[n]{1}$) assume un ruolo fondamentale. Scriviamo $1 = e^{i0} = e^{i(0+2k\pi)} = e^{i2k\pi}$ e sostituiamo nell'equazione:

$$z^n = 1 \to \rho^n e^{in\theta} = e^{i2k\pi} \, .$$

Uguagliando modulo e fase nei due membri arriviamo al sistema

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} . \tag{1.16}$$

La prima equazione, essendo ρ reale e positivo ammette un'unica soluzione $\rho = 1$. La seconda equazione, al variare di k (e ricordiamo che per ogni k diverso $e^{i2k\pi} = 1$) ammette n soluzioni:

$$\theta = \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{per} \qquad k = 0 \cdots n-1 \, .$$

Questo perché se $k \geq n$ si riottengono le stesse soluzioni già trovate.

Esempio 1.3.5. *L'equazione $z^4 = 1$ nel campo reale ha due soluzioni pari a $z = \pm 1$. Per determinare tutte le altre soluzioni, una volta rappresenzato z in notazione esponenziale dobbiamo risolvere il sistema (1.16) ossia*

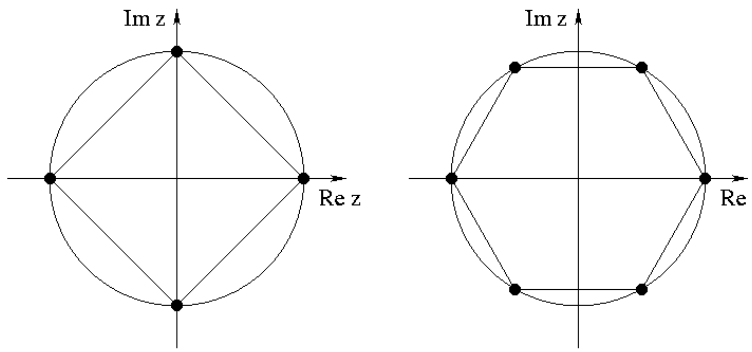
$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = 2k\pi \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \quad \textit{per} \quad k = 0 \cdots 3 \end{cases}$$

e quindi si ottengono le seguenti soluzioni

$$\begin{array}{lllll} k = 0 & \to & \theta_0 = 0 & \to & z = \rho e^{i0} = 1 \\ k = 1 & \to & \theta_1 = \pi/2 & \to & z = \rho e^{i\pi/2} = i \\ k = 2 & \to & \theta_2 = \pi & \to & z = \rho e^{i\pi} = -1 \\ k = 3 & \to & \theta_3 = 3\pi/2 & \to & z = \rho e^{i3\pi/2} = -i \end{array} .$$

Se avessimo cercato le soluzioni anche per $k = 4$ avremmo trovato $\theta_4 = 2\pi = 0 = \theta_0$, ossia una soluzione già presa in considerazione.

Bisogna notare che, in generale, se rappresentiamo le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$ nel piano complesso, otteniamo il poligono regolare con n lati, passante per il punto $z = 1$ e circoscritto alla circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine.



In questa figura sono rappresentati, a sinistra, le soluzioni dell'equazione $z^4 = 1$ (come da esempio 1.3.5) mentre a destra, le soluzioni dell'equazione $z^6 = 1$: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,$z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Anche se il risultato è abbastanza spettacolare dal punto di vista geometrico, dal punto di vista matematico è un risultato semplice. Infatti è ovvio che i punti si trovino sulla circonferenza di raggio unitario (visto che la radice $n-$esima di un numero complesso di modulo 1 sarà necessariamente pari a 1: $z^n = 1 \;\rightarrow\; |z| = |\sqrt[n]{1}| = |1| = 1$) e ogni radice disterà dalla successiva per un angolo pari a $\tilde{\theta} = 2\pi/n$. Per cui, mettendole tutte in fila e unendole si otterrà il poligono regolare con n lati circoscritto dalla circonferenza di raggio 1.