

# MODELLI MATEMATICI: I TANTI VOLTI DELLA REALTÀ

## 1 Introduzione

La nozione di modello risale al sec. VI a.C. quando Pitagora tentò di definire la struttura dell'universo attraverso l'analisi di numeri che rappresentavano i corpi celesti: era un primitivo tentativo di costruire un modello matematico della realtà fisica. Nel Seicento, attraverso il pensiero di Galileo e Newton, sembrò che un insieme di formule e di equazioni potessero spiegare la dinamica di tutti i corpi e quindi dell'universo intero. Solo nell'800, con lo sviluppo del calcolo differenziale e infinitesimale, fu possibile rappresentare molti processi dinamici in termini di equazioni differenziali e integrali, e l'uso di modelli matematici si rivelò un potente strumento di indagine scientifica. Infine, l'uso crescente e generalizzato dei calcolatori in questo secolo ha dato un forte impulso alla modellistica matematica, favorendo l'implementazione di algoritmi sempre più sofisticati ed evoluti e permettendo la risoluzione di problemi sempre più complessi.

I modelli matematici riguardano diverse discipline, da quelle considerate tradizionalmente più quantitative come la fisica e la chimica a quelle che, come la biologia e l'ecologia, hanno conosciuto uno sviluppo più recente, anche a causa della loro maggiore complessità. Più recente ancora è l'uso sistematico di modelli matematici in settori che coinvolgono decisioni da parte dell'uomo, quali l'economia e la finanza.

Accanto ai più noti modelli deterministici, che rappresentano processi di tipo causa-effetto, si sono sviluppati negli ultimi tempi altri modelli che descrivono sistemi, anche costituiti da pochi elementi, che manifestano un comportamento intrinsecamente aleatorio, legato al concetto di *caos*: sono questi i modelli stocastici.

## 2 Formulazione di un modello

I fenomeni naturali e i sistemi fisici sono caratterizzati da un'estrema complessità, dato che in essi intervengono numerose variabili, tutte intrinsecamente connesse in modo non lineare. In generale, chiameremo *sistema* un insieme di elementi nel quale si definisce una *legge* che lega questi elementi tra loro. Quando il sistema evolve nel tempo parleremo di sistema dinamico. Si pensi al *sistema planetario*, ad un *sistema economico*, ad un *sistema ecologico*, ecc.... Una volta individuato il sistema da studiare, si passa al concetto di modello. È questa un'astrazione matematica che crea un'analogia, una corrispondenza con il sistema reale. Esso è dunque una rappresentazione idealizzata della realtà e si esprime attraverso una relazione in termini logico-matematici tra le variabili caratteristiche del sistema. Tale relazione può essere costituita, ad esempio, da equazioni differenziali, integrali, da un sistema di equazioni algebriche, da disequazioni. Sarà perciò possibile studiare le proprietà del modello, per comprendere e prevedere l'evoluzione stessa del sistema, o le relazioni tra le diverse variabili, o per capire le conseguenze di un certo intervento, in modo da poter intervenire poi direttamente nella realtà.

Parliamo di modelli *deterministici* quando si suppone che, note le equazioni che regolano la dinamica delle variabili ed il loro stato all'istante iniziale, si possa determinare il loro stato ad ogni istante futuro. Tra i modelli deterministici, chiameremo *differenziali* quelli che si rappresentano con un insieme di equazioni (o disequazioni) differenziali. In questo paragrafo ci riferiremo a tale classe di modelli.

Nella costruzione di un modello si devono evidenziare solo le variabili e i parametri più significativi per la comprensione del problema in esame. Infatti, raramente i modelli includono tutti gli aspetti di un fenomeno, ma si limitano a descriverne quelli più essenziali, in modo che il modello sia più semplice da risolvere e più utile nel capire la correlazione tra i vari elementi che lo compongono.

Un altro requisito è l'*ammissibilità*, ossia la condizione per cui il problema matematico sia *ben posto* e non violi principi fisici di compatibilità o leggi di conservazione. Un modello poi, per essere funzionale, deve possedere contemporaneamente i seguenti tre elementi che spesso sono in contrapposizione tra loro:

- *generalità*: deve descrivere una classe di fenomeni quanto più ampia possibile.
- *affidabilità*: deve descrivere un processo abbastanza accuratamente, in modo che il modello, pur fornendo risultati approssimati, sia abbastanza significativo.
- *semplicità*: deve essere sufficientemente semplice da poter essere risolto matematicamente.

Nel delicato equilibrio tra questi tre fattori sta la definizione di un *buon* modello.

Per la soluzione delle equazioni espresse dai modelli, si utilizzano essenzialmente due approcci: quello qualitativo che permette di avere un'idea su alcune proprietà delle soluzioni (esistenza e unicità, tendenza ad uno stato stazionario, presenza di oscillazioni, esprimibilità per mezzo di funzioni elementari, ecc.)<sup>1</sup>, e quello quantitativo, o numerico, con il quale è possibile trovare dei valori approssimati delle soluzioni.

La complessità e la non linearità della maggior parte dei modelli richiedono particolare attenzione nella loro risoluzione numerica. E' necessario individuare un algoritmo ad hoc che consenta di arrivare alla soluzione approssimata del problema nel modo più efficiente e accurato possibile.

Un ultimo aspetto non meno importante è la *validazione* del modello, che riguarda il confronto tra le risposte fornite da un certo modello e quelle del sistema reale. Questo confronto evidenzia inevitabilmente alcune discrepanze tra risultati ottenuti dal modello e dati sperimentali (considerati questi ultimi privi di errori di misura). Queste sono dovute essenzialmente a due cause che è importante riuscire a separare:

1. il modello si basa su un'ipotesi falsa o troppo grossolana, usa una legge empirica, non universale, oppure utilizza una semplificazione inopportuna. In questo caso si perfeziona il modello eliminandone alcuni elementi secondari o introducendone altri più importanti e si ripetono le fasi precedenti fino a che le risposte ottenute dalla simulazione non siano sufficientemente rappresentative della realtà.
2. il metodo numerico utilizzato non risolve il problema in maniera sufficientemente accurata e quindi occorre migliorarlo.

I modelli, opportunamente interpretati ed utilizzati, offrono numerosi vantaggi:

1. Permettono di comprendere meglio la realtà, evidenziando il contributo dei vari aspetti concorrenti.
2. Danno informazioni sulle distribuzioni e i legami tra le grandezze in gioco che sarebbe stato possibile ottenere solo con un elevato numero di strumenti. Il modello infatti è generalmente globale, mentre la misura è per lo più locale.
3. Permettono di ridurre o evitare gli esperimenti reali, che spesso sono costosi e poco affidabili. E consentono peraltro di replicare le simulazioni all'infinito, a differenza della realtà fisica che per sua natura non sempre è riproducibile. Inoltre i risultati delle simulazioni forniscono indicazioni per un raffinamento successivo del modello stesso. Attraverso un processo di *prova e riprova* sono possibili graduali miglioramenti a basso costo.

---

<sup>1</sup>Per alcuni di questi modelli, pochi in verità, è possibile ricavare una soluzione esatta o analitica.

4. Danno informazioni su processi altrimenti non osservabili o misurabili o quando gli strumenti di misura potrebbero alterare il fenomeno stesso. A differenza dello strumento di misura, il modello non è invasivo.
5. Forniscono un livello di dettaglio superiore all'esperimento. Spesso l'evoluzione di un processo è meglio descritta da un modello che da un esperimento.
6. Consentono un'espansione o una contrazione temporale, ovvero il tempo simulato può essere scalato a piacere: si possono così analizzare singole fasi che altrimenti non sarebbero accessibili in caso di rapida evoluzione del sistema, oppure, al contrario, si possono contrarre i tempi di svolgimento e quindi è possibile prevedere l'evoluzione del fenomeno su periodi lunghissimi.
7. Sono un ausilio utile (ed economico) nella progettazione di macchine, sistemi di controllo, infrastrutture, e aiutano a capire quali sono gli eventuali problemi, i difetti da eliminare, le parti da migliorare.

### 3 Modelli stocastici

Finora abbiamo parlato di modelli deterministici, in cui l'evoluzione del sistema è governata da una legge ben esprimibile in termini analitici. In realtà molti fenomeni in natura sono retti da leggi poco note, o conosciute solo empiricamente. Inoltre, gli stessi fenomeni sono spesso influenzati da fattori dalle caratteristiche imprevedibili (si pensi, ad esempio, agli eventi meteorologici, al flusso dell'acqua di un fiume, al rotolare di un dado, come anche ad alcuni processi economici), non riconducibili esclusivamente ad un'interpretazione deterministica. Per questi sistemi è possibile dare solo delle stime di *probabilità* che esso si trovi in determinati stati e le leggi secondo cui tali probabilità evolvono: essi danno luogo ai modelli *stocastici*.

Non sempre l'evoluzione dei fenomeni ha una spiegazione deterministica, ma deve considerare alcuni di essi come se fossero prodotti dal caso (il moto browniano rappresenta l'esempio per eccellenza di un fenomeno assolutamente aleatorio, espressione della casualità pura); la comparsa di tali fenomeni casuali è da porre in relazione con la presenza di processi perturbativi che di per sé sono deterministici: accade però che una perturbazione comunque piccola dello stato iniziale del sistema produce una variazione enorme nell'evoluzione del sistema stesso. Dato che la rilevazione dello stato iniziale è inevitabilmente approssimata, questo significa che esistono sistemi che, per quanto deterministici, non consentono la previsione. È questo il limite intrinseco dei modelli deterministici, che spiega anche i modesti risultati finora ottenuti nello studio e nella previsione degli eventi meteorologici.

Da un lato, la scoperta del caos generò, ai primi del '900, una crisi definitiva e irreversibile del determinismo; dall'altro, essa ha permesso di far rientrare nell'ambito di una descrizione causale<sup>2</sup> alcuni processi caratterizzati da comportamenti aleatori. Ad esempio, che cosa rende il moto di un fluido tanto difficile da prevedere rispetto al moto del sistema solare? Entrambi i sistemi sono costituiti da molte componenti e sono retti dalla seconda legge della dinamica:  $F = ma$ , che può essere considerata una semplice formula valida per tutti i sistemi dinamici: essa consente di prevedere l'evoluzione di un sistema, nota che sia la sua condizione ad un dato istante. Al fisico sovietico Landau è attribuita un'efficace spiegazione del moto aleatorio dei fluidi turbolenti: essi conterrebbero molte oscillazioni diverse e indipendenti che, man mano che il fluido aumenta la sua velocità, entrano nel moto una alla volta. Benché le singole oscillazioni possono essere semplici, la complessità non lineare del moto combinato rende impossibile prevedere il flusso complessivo. Qualunque effetto, per quanto piccolo, acquista rapidamente proporzioni macroscopiche. È questa una delle caratteristiche fondamentali del caos.

---

<sup>2</sup>È curioso notare che *caso* è l'anagramma di *caos* e *casuale* di *causale*.

## 4 Due esempi

Torniamo ai modelli deterministici. Abbiamo detto che il modello non pretende di esprimere l'intima e reale essenza del fenomeno, ma ne fornisce un'immagine capace di comprenderne uno o più aspetti. Pur fornendo la matematica un linguaggio e un sistema di rappresentazione di enorme potenza e di indiscutibile utilità, si è ormai superato il concetto di biunivocità tra realtà e modello: accade invece che singoli aspetti della realtà possono essere rappresentati con moltissimi modelli, assai diversi, ma tutti utili ed efficaci. La modellistica matematica moderna ha ormai rinunciato ad una rappresentazione unificata della realtà: è una costruzione parziale, una proiezione limitata della realtà che non esclude che vari modelli possano coesistere più o meno bene l'uno con l'altro. Insomma, il modello è una sonda che viene immersa nella realtà e non la sua immagine matematica.

Concludiamo con due esempi classici tratti da scienze di per sé lontane in senso stretto dalla matematica ma dove, tuttavia, la matematica si è rivelato un potente strumento di ricerca. Pur essendo stati superati da modelli più sofisticati ed evoluti, essi mantengono la loro validità storica e didattica come capisaldi della modellistica di questo secolo.

### Il modello di Volterra per la dinamica di popolazioni.

Nel 1926 il matematico italiano Vito Volterra propose un modello per spiegare il comportamento oscillatorio dei dati relativi alla pesca di una specie predatrice e della sua preda nel mare Adriatico. Indicando con  $x(t)$  la quantità di prede al tempo  $t$  e con  $y(t)$  quella dei predatori, il modello di Volterra è dato dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma x - \delta) \end{cases} \quad (4.1)$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sono costanti positive. In questo modello si suppone che la popolazione delle prede in assenza del predatore avrebbe una crescita esponenziale, mentre quella dei predatori in assenza delle prede si estinguerebbe in modo esponenziale.

Si dimostra facilmente che ogni soluzione  $(x(t), y(t))$  del modello di Volterra soddisfa l'equazione (*legge di conservazione*):

$$\log(x^\delta y^\alpha) - \gamma x - \beta y = K$$

dove  $K$  è una costante che dipende dai dati iniziali.

Uno sguardo alle traiettorie definite da questo modello consente di affermare che, normalmente, il numero dei predatori cresce mentre quello delle prede decresce. Ciò accade fino a quando il numero delle prede diventa troppo piccolo per le esigenze dei predatori. Allora la popolazione predatrice comincia a decrescere diminuendo la pressione sulle prede che così, a un certo punto, ricominciano a crescere. Quando la popolazione delle prede raggiunge di nuovo una certa consistenza, il numero dei predatori riprende a crescere e il ciclo riprende.

Il modello di Volterra presenta non pochi inconvenienti se utilizzato per spiegare dati sperimentali, ma continua a rappresentare, nella sua semplicità, il prototipo in dinamica delle popolazioni.

### Modelli per la diffusione di epidemie.

La letteratura sui modelli matematici descrittivi la diffusione di epidemie si è sviluppata soprattutto a partire dagli anni '70. Scopo di tali modelli è essenzialmente quello di individuare valori di soglia di alcuni parametri che separino situazioni di estinzione della malattia da situazioni endemiche. In alcuni casi i modelli possono aiutare ad individuare gli interventi di tipo socio-sanitario adatti a sradicare l'epidemia stessa. Un prototipo in questo ambito può essere considerato il modello di Kermack-McKendrick. Consideriamo una popolazione divisa in tre classi di individui:

1. I: gli *infettivi*, cioè coloro che hanno contratto la malattia e sono contagiosi;

2. S: i *suscettibili*, cioè coloro che possono essere contagiati;
3. R: i *rimossi*, ossia coloro che hanno acquisito immunità, o sono isolati, o sono morti.

La dinamica delle tre classi può essere descritta dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I \end{cases} \quad (4.2)$$

dove  $\beta$  e  $\nu$  sono i tassi di contagio e di decadimento, e dove sono assegnate opportune condizioni iniziali<sup>3</sup>. L'analisi di questo sistema mostra che se il numero iniziale dei suscettibili  $S_0$  è minore di  $\nu/\beta$ , il numero di individui infettivi decresce fino all'estinzione della malattia. Se invece il numero iniziale dei suscettibili è maggiore di  $\nu/\beta$  allora il numero di individui infettivi inizialmente cresce (si innesca cioè una epidemia), raggiunge un massimo e poi, quando la popolazione suscettibile è stata sufficientemente ridimensionata, l'epidemia si attenua fino all'estinzione della malattia.

## Bibliografia:

- [1] John Maynard Smith, *L'ecologia e i suoi modelli*, Mondadori, Milano, 1975.
- [2] V. Comincioli, *Problemi e modelli matematici nelle scienze applicate*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1993.
- [3] J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1989.

GIUSEPPE PONTRELLI  
Istituto per le Applicazioni del Calcolo - CNR  
Viale del Policlinico, 137 - 00161 Roma  
E-mail: [pontrelli@iac.rm.cnr.it](mailto:pontrelli@iac.rm.cnr.it)

ANDREA DI LIDDO  
Istituto per Ricerche di Matematica Applicata - CNR  
Via Amendola, 122 - 70125 Bari  
E-mail: [irmaad02@area.ba.cnr.it](mailto:irmaad02@area.ba.cnr.it)

---

<sup>3</sup>Si noti che, pur rappresentando un problema differente, la struttura e le proprietà di queste equazioni sono le stesse del modello precedente.