# Calcolo Numerico con elementi di programmazione

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni sui metodi
per la soluzione di
sistemi di equazioni non lineari

# Sistemi di equazioni non lineari

Un **sistema di equazioni non lineari** può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Supporremo che le **funzioni** $f_i : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, siano almeno **continue** in $D$.

Le **soluzioni** del sistema sono i vettori $\boldsymbol{\Xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ che **annullano simultaneamente** tutte le $n$ equazioni.

# Metodo di Newton per sistemi

**Sistema non lineare:**

$$F(X) = 0 \quad X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

Il **metodo di Newton** per la soluzione di sistemi non lineari si basa sulla **linearizzazione** della $F(X) = [f_1(X), \ldots, f_n(X)]^T$

Se le funzioni $f_i(X)$ hanno **derivate parziali limitate**, allora si può sviluppare in **serie di Taylor** la funzione vettoriale $F(X)$ scegliendo come punto iniziale $X^{(k)}$

$$F(X) = F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)})\,(X - X^{(k)}) + \;\ldots$$

dove $J_F(X) = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1,\ldots,n}$ è la **matrice jacobiana** della $F(X)$

$$\Rightarrow \quad F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)})\,(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

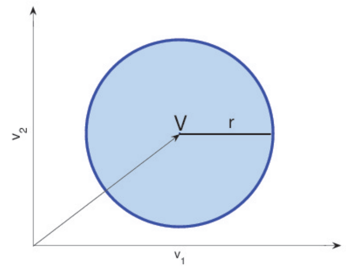
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[J_F(X^{(k)})\right]^{-1} F(X^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

# Norma di vettore

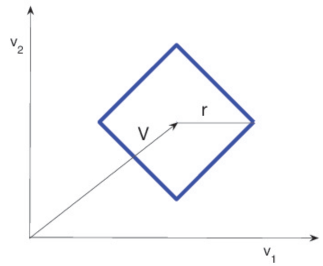
La **norma** di un vettore $V = [v_1, \ldots, v_n]^T$ viene utilizzata per *misurare* la sua **lunghezza**.

**Intorno**: $\|V - W\| \leq r$

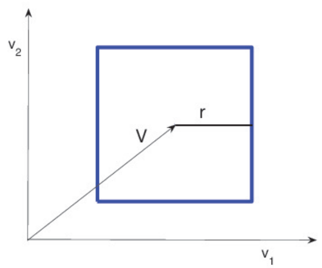
- **Norma due o euclidea:** $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$




- **Norma uno:** $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$




- **Norma infinito:** $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$




**Nota**. Tutte le norme sono **equivalenti**: $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

# Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0, \quad \|V\| = 0 \Longleftrightarrow V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall\, V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall\, V, W \in \mathbf{R}^n$ **(disuguaglianza triangolare)**

In uno **spazio vettoriale normato** $S$ è possibile introdurre la **distanza** tra due punti $V$ e $W$ in $S$

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

**Proprietà della distanza**:

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \qquad \forall\, V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \qquad \forall\, V, W, Z \in S$

# Convergenza del metodo di Newton

Il **metodo di Newton** è un **metodo iterativo** la cui **funzione di iterazione** è

$$\Phi_N(X) = X - [J_F(X)]^{-1} F(X)$$

**Teorema**. Sia $\Xi$ una soluzione del sistema non lineare

$$F(X) = 0$$

con $F \in C^2(D)$ ($D \in \mathbf{R}^n$ intorno di $\Xi$).

Sia $\det J_F(X) \neq 0$ per $X \in D$.

$\Rightarrow$ $\alpha$) $\exists\, A \subseteq D$ tale che, $\forall\, X^{(0)} \in A$, la successione

$$\{X^{(k)}\} = \{\Phi_N(X^{(k-1)})\}$$

**converge** a $\Xi$;

$\beta$) la convergenza è **quadratica**: $\lim_{k\to\infty} \frac{||E^{(k+1)}||}{||E^{(k)}||^2} > 0$.

# Osservazioni sul metodo di Newton per sistemi

$$X^{k+1} = X^k - \left[J_F(X^k)\right]^{-1} F(X^k)$$

- La **convergenza** del metodo è legata all'**accuratezza** dell'**approssimazione iniziale**.

- Ad ogni passo bisogna verificare che $\det J_F(X^{(k)}) \neq 0$. Nella pratica, si può avere **instabilità** numerica se $\det J_F(X^{(k)})$ è **piccolo** $\Rightarrow$ conviene utilizzare una **precisione elevata**.

- Poiché il **costo computazionale** del calcolo di $\det J_F(X^{(k)})$ può essere **elevato**, si preferisce risolvere ad ogni passo il sistema lineare

$$J_F(X^{(k)})Y = -F(X^{(k)}) \Rightarrow X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y$$

- **Criterio di arresto**: il procedimento iterativo viene arrestato quando

$$||X^{(k+1)} - X^{(k)}|| \leq \epsilon$$

- A volte si preferisce ricalcolare $J_F(X^{(k)})$ non ad ogni iterazione ma **dopo 3-4 iterazioni** (metodi di tipo quasi-Newton).

# Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

Per $n = 2$ si ha: $\begin{cases} f(X) = f(x, y) = 0 \\ g(X) = g(x, y) = 0 \end{cases}$

**Formula di Taylor** di punto iniziale $X^{(k)} = [x_k, y_k]^T$:

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(X) = f(X^{(k)}) + f_x(X^{(k)})(x - x_k) + f_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_1 = 0 \\ g(X) = g(X^{(k)}) + g_x(X^{(k)})(x - x_k) + g_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_2 = 0 \end{cases}$$

dove $R_1 = R_1(X, X^{(k)})$, $R_2 = R_2(X, X^{(k)})$ rappresentano il **resto**.

La **soluzione approssimata** del **sistema non lineare** è la soluzione del **sistema lineare** che si ottiene trascurando il resto nello sviluppo precedente.

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

# Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

può essere riscritto in **forma matriciale**

$$\Downarrow$$

$$J_F(X^{(k)})\ (X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)})$$

dove $J_F(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} f_x(X^{(k)}) & f_y(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)}) & g_y(X^{(k)}) \end{bmatrix}$

è la **matrice Jacobiana** di $F(X)$

Il **sistema lineare** ammette soluzione **se e solo se**

$$|J_F^{(k)}| = \det J_F(X^{(k)}) \neq 0$$

$$J_F^{-1}(X^{(k)}) = \frac{1}{|J_F^{(k)}|} \begin{bmatrix} g_y(X^{(k)}) & -f_y(X^{(k)}) \\ -g_x(X^{(k)}) & f_x(X^{(k)}) \end{bmatrix}$$

La soluzione è

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J_F^{-1}(X^{(k)})F(X^{(k)})$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{1}{|J_F^{(k)}|}\left[ f(X^k)\, g_y(X^{(k)}) - g(X^{(k)})\, f_y(X^{(k)}) \right] \\[2ex] y_{k+1} = y_k - \dfrac{1}{|J_F^{(k)}|}\left[ g(X^k)\, f_x(X^{(k)}) - f(X^{(k)})\, g_x(X^{(k)}) \right] \end{cases} \qquad k \geq 0$$

# Esercizio 1

Determinare i punti di intersezione tra il **cerchio** $x^2+y^2 = 3$ e l'**iperbole** $xy = 1$ con 5 decimali esatti.

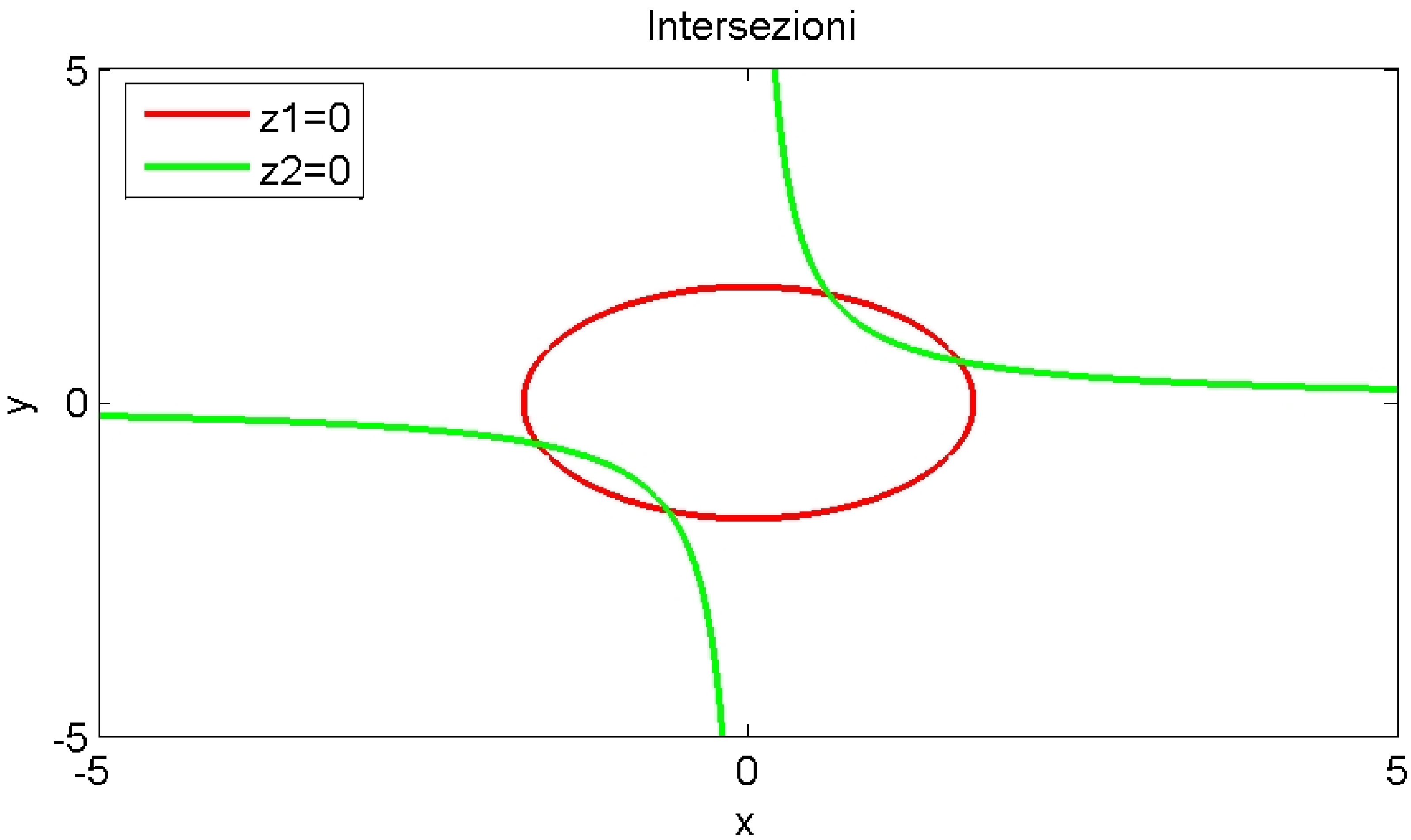
**Soluzione**

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ e $g(x, y) = xy - 1$.

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

**Separazione grafica:** Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.




Ne segue che, detti $\xi_1 = (x_1, y_1)$ e $\xi_2 = (x_2, y_2)$ i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate $(x_1, y_1)$ è uno zero sia di $f$ che di $g$, lo è anche il punto di coordinate $(y_1, x_1)$. Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto $\xi_1 = (x_1, y_1)$ è contenuto in $I_1 = [0, 1] \times [1, \sqrt{3}]$.

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x,y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $F(x,y) = [f(x,y), g(x,y)]^T \in C^2(I_1)$.

Inoltre

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x,y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \quad |J_F(x,y)| \neq 0 \quad \text{in} \quad I_1 = [0,1] \times [1,\sqrt{3}].$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x,y) = xy - 1 = 0 \end{cases} \qquad |J_F(x,y)| = 2x^2 - 2y^2$$

Scegliendo il punto $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{1}{|J_F(x_0,y_0)|}\left[ f(x_0,y_0)\, g_y(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\, f_y(x_0,y_0) \right] \\ \\ y_1 = y_0 - \dfrac{1}{|J_F(x_0,y_0)|}\left[ g(x_0,y_0)\, f_x(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\, g_x(x_0,y_0) \right] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left[ \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{4} - 3\right)\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2} - 1\right) 2\dfrac{3}{2} \right] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8} \\ \\ y_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}\left[ \left(\dfrac{3}{4} - 1\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2} \right] = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{8} \end{cases}$$

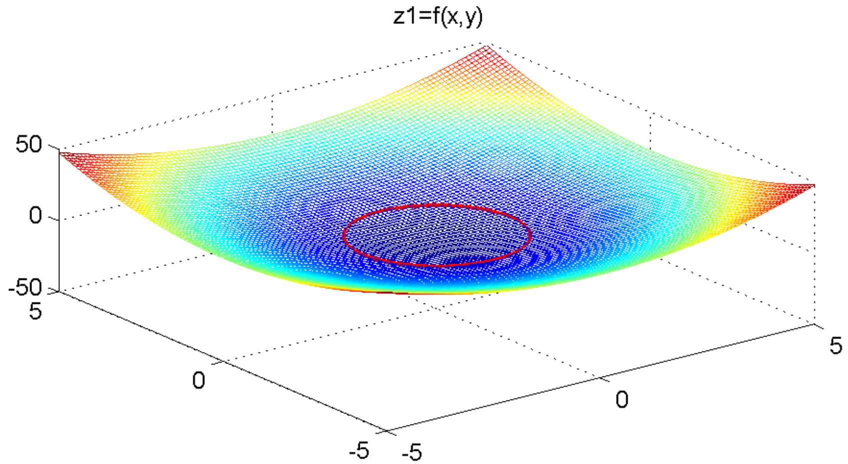
$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

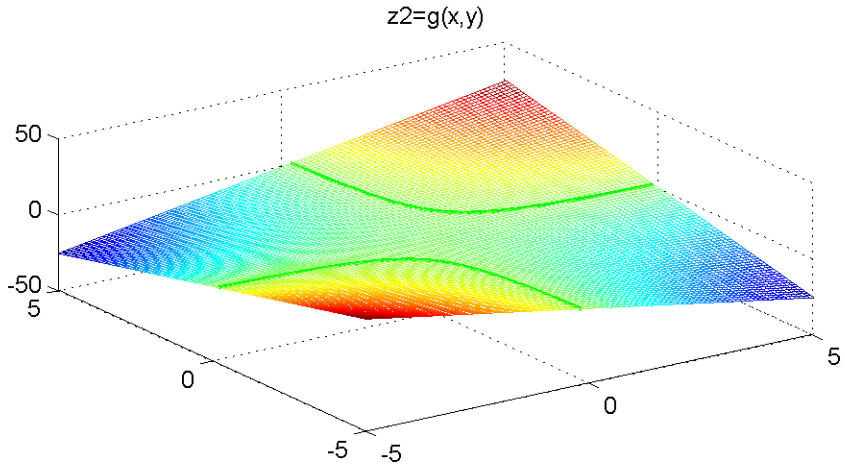
$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

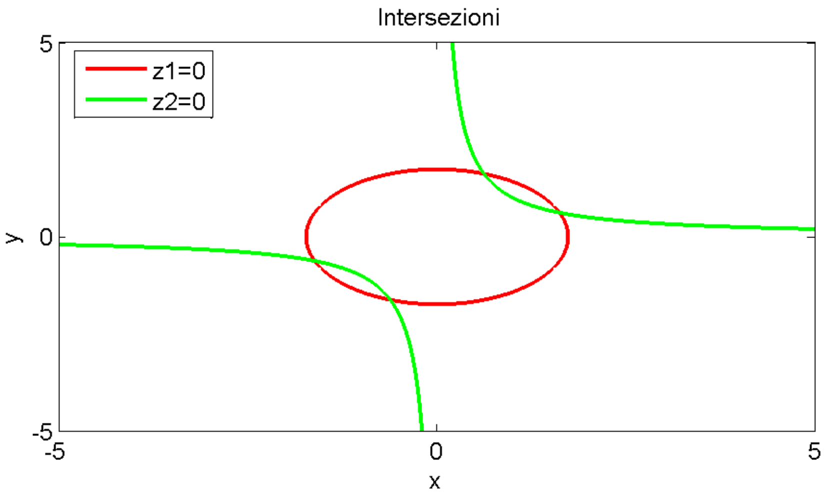
## Localizzazione delle radici: rappresentazione grafica in Matlab

Per localizzare le radici del sistema si disegnano le superfici $z1 = f(x, y)$ e $z2 = g(x, y)$ e le **curve di livello** $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$.

```
[x,y]=meshgrid(-3:.1:3);
z1=x.^2+y.^2-3;
z2=x.*y-1;
figure,
subplot(2,2,1), mesh(x,y,z1), title('z1=f(x,y)')
hold on,
contour(x,y,z1,[0 0],'r','linewidth',2);  % linee di livello f(x,y) = 0
subplot(2,2,2), mesh(x,y,z2), title('z2=g(x,y)')
hold on
contour(x,y,z2,[0 0],'g','linewidth',2); % linee di livello g(x,y) = 0
subplot(2,2,3), contour(x,y,z1,[0 0],'r','linewidth',2);
hold on, contour(x,y,z2,[0 0],'g','linewidth',2);
xlabel('x'), ylabel('y'), legend('z1=0','z2=0',2)
title('Intersezioni')
```


z1=f(x,y)
50
0
-50
5
0
-5
-5
0
5


z2=g(x,y)
50
0
-50
5
0
-5
-5
0
5


Intersezioni
z1=0
z2=0
y
5
0
-5
-5
0
5
x

# Esercizio 2

Dato il **sistema non lineare**

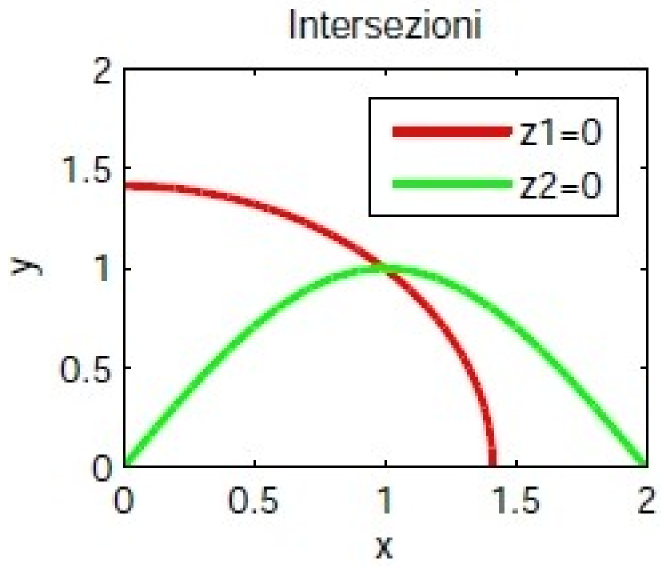
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - sin(\frac{\pi}{2}x) = 0 \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

**Soluzione** Si deve determinare un opportuno intervallo $I$ in cui la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ sia unica.

## Separazione grafica

Disegnando il grafico delle due funzioni e guardando solo il primo quadrante




possiamo concludere che $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ è un buon **intervallo di separazione**.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - sin(\frac{\pi}{2}x) = 0 \end{cases}$$

La funzione $F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]^T \in C^2(I)$, e la matrice Jacobiana è data da

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}x) & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x, y)| = 2x + \pi y cos(\frac{\pi}{2}x) \neq 0$$

in un opportuno intorno del punto $(1, 1)$ contenuto in $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$

$$|J_F(1, 1)| = 2 > 0$$

Sono verificate quindi le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

# Esercizio 3

Mostrare che risolvere il sistema precedente è equivalente a risolvere la seguente equazione non lineare

$$x.^2 + sin^2(\frac{\pi}{2}x) = 2$$

Risolvere tale equazione con il **metodo di Newton-Raphson** e confrontare il risultato con la soluzione del sistema ottenuta risolvendo il sistema con il metodo di Newton.

# Esercizio 4

Data l'equazione non lineare

$$g(y;\lambda) = e^{-y} - 2y - \lambda = 0$$

dipendente dal parametro reale $\lambda$,

1) determinare per quali valori di $\lambda$ l'equazione ammette un'unica radice nell'intervallo $I = [0;1]$;

2) posto $\lambda = -2$ , verificare se le funzioni di iterazione

$$\psi_1(y) = \frac{1}{2}e^{-y} + 1 \qquad \psi_2(y) = y + \frac{e^{-y} - 2y + 2}{e^{-y} + 2}$$

sono adatte ad approssimare la radice nell'intervallo $D = [1;2]$ con il metodo delle **approssimazioni successive**;

3) in caso di convergenza, specificare per ciascuna funzione la scelta dell'**approssimazione iniziale**

# Soluzione

1) La funzione $g(y;\lambda)$ è **monotona decrescente** per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} g(y;\lambda) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(y;\lambda) = -\infty$$

Per cui la funzione $g(y;\lambda)$ ha un'unica radice $\xi \in \mathbf{R}$. Affinchè $\xi \in I = [0,1]$ dovremo avere

$$\begin{cases} g(0;\lambda) > 0 \\ g(1;\lambda) < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{e} - 2 \leq \lambda \leq 1$$

2) Per $\lambda = -2$ l'equazione diventa $g(y;-2) = e^{-y} - 2y + 2$

Per verificare che $\psi_1$ sia adatta ad approssimare l'unica radice nell'intervallo $D = [1,2]$ bisogna verificare che soddisfi le ipotesi del teorema del punto unito. Poichè

$$\psi_1'(y) = -\frac{1}{2}e^{-y}$$

avremo che $\psi_1$ è una funzione monotona decrescente, per cui $\forall y \in [1,2]$

$$1 < 1.068 \approx \psi_1(2) = \frac{1}{2e^2} + 1 \leq \psi(x) \leq \psi_1(1) = \frac{1}{2e} + 1 \approx 1.184 < 2$$

$$\Rightarrow \psi_1(D) \subseteq D$$

Inoltre $|\psi_1'(y)| = \frac{1}{2}e^{-y}$ è una funzione monotona decrescente, per cui

$$\max_{y\in[1,2]} |\psi_1'(y)| = \frac{1}{2e} \approx 0.184 < 1$$

Possiamo quindi concludere che $\psi_1$ è adatta ad approssimare la radice

La funzione $\psi_2$ è la **funzione di iterazione del metodo di Newton**. La funzione $g(y;-2) = e^{-y} - 2y + 2$ è infinitamente derivabile, in particolare poichè

$$g'(y;-2) = -e^{-y} - 2 < 0 \quad \forall y \in \mathcal{R}$$

$$g''(y;-2) = e^{-y} > 0 \quad \forall y \in \mathcal{R}$$

avremo che il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'**estremo di Fourier** dell'intervallo $D = [1, 2]$.

3) $\psi_1$ verifica le ipotesi del Teorema del punto unito, per cui il **metodo delle approssimazioni successive**

$$y^{k+1} = \psi_1(y^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge per qualsiasi $y^0 \in [1, 2]$.

$\psi_2$ è la funzione di iterazione del **metodo di Newton**, e poichè la derivata prima e seconda sono non nulle in $D$ il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'**estremo di Fourier** dell'intervallo, cioè l'unico estremo $y^0$ per cui

$$g(y^0, -2)g''(y^0, -2) > 0$$

. In questo caso $y^0 = 1$.

# Esercizio 5

Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} f(x,y) = 2\,x - 0.0002\,x\,y - 0.0001\,x^2 = 0 \\ g(x,y) = 4\,y - 0.0003\,y^2 - 0.0004\,x\,y = 0 \end{cases}$$

$i)$ separare le radici;

$ii)$ utilizzare il **metodo di Newton** per approssimare la radice in $D = [3000, 6000] \times [6000, 9000]$.

# Traccia della soluzione

$i)$ Dalle due equazioni si può ricavare $y$ come funzione lineare di $x$:

$$\begin{cases} y = 10^4 - 0.5\,x \\ y = \dfrac{4}{3}(10^4 - x) \end{cases}$$

Le due rette si **intersecano** solo quando $\begin{cases} x = 4000 \\ y = 8000 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\overline{X} = [4000, 8000]$ è l'**unica** soluzione **non banale** del sitema dato.

$ii)$ Le funzioni $f$, $g \in C^2(D)$.

$$\begin{cases} f_x = 2 - 2 \cdot 10^{-4}\, y - 2 \cdot 10^{-4}\, x & f_y = -2 \cdot 10^{-4}\, x \\ g_y = 4 - 6 \cdot 10^{-4}\, y - 4 \cdot 10^{-4}\, x & g_x = -4 \cdot 10^{-4}\, y \end{cases}$$

Utilizzando come approssimazione iniziale il **punto medio** del dominio $D$, dopo **30 iterazioni** si ottiene

$x_{30} = 3999.998 \quad y_{30} = 8000.001$
$||E^{(30)}||_\infty = 0.43 \cdot 10^{-2}$

# Esercizio 6

Approssimare le radici del sistema non lineare

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \\ g(x,y) = y\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \qquad (x,y) \in [0,\sqrt{3}] \times [0,2]\,,$$

con il metodo di Newton.

## Traccia della soluzione

Il determinante della matrice jacobiana del sistema è

$$\begin{aligned} \det J_F(X) &= f_x(x,y)\, g_y(x,y) - f_y(x,y)\, g_x(x,y) = \\ &= (2x)(\sqrt{x}) - (2y)(\tfrac{1}{x\sqrt{x}}) = 2\,\frac{1}{x\sqrt{x}}\,(x^3 - y) \end{aligned}$$

## Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§**3.10**

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli *Esercizi di Calcolo Numerico*
Cap. 1: **1.28-1.29**
Cap. 7: **7.53-7.56**