

Calcolo Numerico con elementi di programmazione

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni
sulla quadratura numerica

Integrazione numerica

Problema: approssimare **numericamente** integrali definiti

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

L'intervallo di integrazione $[a, b]$ può essere anche illimitato.

Si ricorre all'**integrazione numerica** quando:

- la primitiva di f **non** può essere espressa in **forma chiusa**,
ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) = e^{-x^2}$;
- l'**espressione analitica** di $I(f)$ è **complicata** da calcolare;
- i valori di f sono noti solo in alcuni **nodi** x_i , $i = 0, \dots, n$,
ad esempio quando sono il risultato di misure sperimentali.

Soluzione: **approssimare** la funzione integranda $f(x)$ con il **polinomio interpolatore** $p_n(x)$, costruito su un insieme opportuno di **nodi** x_i , $i = 0, \dots, n$; quindi approssimare $I(f)$ con $I(p_n)$.

Esempio

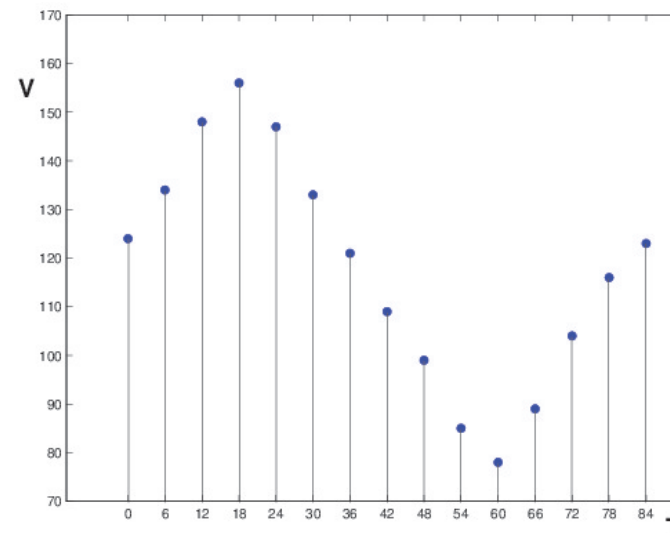
Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

T (s)	0	6	12	18	24	30	36	
V (m/s)	124	134	148	156	147	133	121	
T (s)	42	48	54	60	66	72	78	84
V (m/s)	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

la lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0; t_1]$

è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$.



Formule di quadratura interpolatorie

Formula di interpolazione di Lagrange:

$$f(x) = p_n^*(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + E_n(x)$$



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + E_n(x) \right] dx = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i + R_n(f) = \underbrace{S_n(f)} + \underbrace{R_n(f)} \end{aligned}$$

Parte approssimante

Coefficienti: $c_i = \int_a^b l_i(x) dx$

Errore di troncamento

o resto

Se consideriamo anche gli **errori** ϵ_i sui dati si ha

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) + \epsilon_i) l_i(x) + E_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx + \sum_{i=0}^n \epsilon_i \int_a^b l_i(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i + \int_a^b E_n(x) dx + \sum_{i=0}^n \epsilon_i c_i = S_n(f) + R_n(f) + \underbrace{R_n^*(f)}_{\text{Errore di propagazione}}$$

$$\Rightarrow I(f) = S_n(f) + R_n(f) + R_n^*(f)$$

{	$S_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i$	Parte approssimante
	$c_i = \int_a^b l_i(x) dx$	Coefficienti
	$R_n(f) = \int_a^b E_n(x) dx = \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$	Resto
	$R_n^*(f) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i c_i$	Errore di propagazione

Grado di precisione

L'**interpolazione** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$, quindi $E_n(x) = 0 \Rightarrow R_n(q_m) = 0$, cioè la **formula di quadratura** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$.

Definizione. Si dice che una formula di quadratura ha **grado di precisione** ν se è **esatta** per **tutti** i polinomi $q_m(x)$ di grado $m \leq \nu$, cioè $R_n(q_m) = I(q_m) - S_n(q_m) = 0$, $m \leq \nu$. In particolare, la formula di quadratura è **esatta** per i **monomi** x^k , $k = 0, 1, \dots, \nu$.

- Una formula di quadratura **interpolatoria** a $n + 1$ **nodi** ha grado di precisione **almeno** $n \geq 0$.
- il grado di precisione denota l'ordine massimo dei monomi per i quali la formula di quadratura è esatta, ossia ha resto nullo

- Le formule di quadratura **interpolatorie** sono **esatte** almeno per le funzioni **costanti**. In particolare, se si pone $f(x) = 1$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^n c_i = b - a$$

Consideriamo il polinomio di grado $2n + 2$

$$\Pi(x) = (\pi(x))^2 = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

dove x_i , $i = 0, \dots, n$, sono i **nodi** della formula di quadratura.

- $I(\Pi) = \int_a^b \Pi(x) dx > 0$

- $I(\Pi) = S_n(\Pi) + R_n(\Pi) = \sum_{i=0}^n c_i \underbrace{\Pi(x_i)}_{=0} + R_n(\Pi) = R_n(\Pi)$

⇒ $R_n(\Pi) > 0$: esiste **almeno un polinomio** di grado $2n + 2$ per il quale le formule di quadratura interpolatorie **non** sono **esatte**, quindi $\nu < 2n + 2$.

⇒ Per le **formule interpolatorie** si ha

$$\boxed{n \leq \nu \leq 2n + 1} \quad n \geq 0$$

Scelta dei nodi nelle formule interpolatorie

Differenti **distribuzioni di nodi** danno origine a differenti formule di quadratura con diverso grado di precisione.

- **Formule di Newton-Cotes**

Nodi equispaziati: $x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, n \quad h = \frac{b-a}{n}$

Grado di precisione: $\begin{cases} \nu = n, & n + 1 \text{ pari} \\ \nu = n + 1, & n + 1 \text{ dispari} \end{cases}$

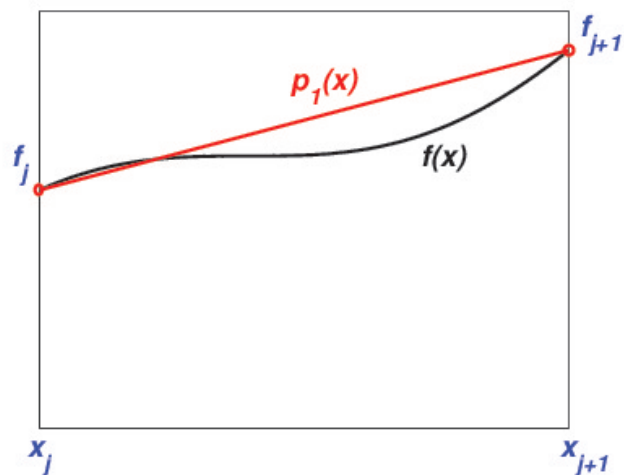
- **Formule gaussiane**

Nodi gaussiani: **zeri** di polinomi ortogonali, ad esempio i **nodi di Chebyshev**; non sono equispaziati e sono interni all'intervallo $[a, b]$.

Grado di precisione: $\nu = 2n + 1$ (massimo)

Formula del trapezio

$$n + 1 = 2, \nu = 1, f \in C^2[a, b]$$



Si approssima $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado **1** che passa per i punti:

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$$
$$x_0 \equiv a, x_1 \equiv b$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \frac{\pi_1(x)}{2!} f''(\xi(x)) = \\ &= f_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + \frac{1}{2} (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

Parte approssimante:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= f_0 \int_a^b \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx + f_1 \int_a^b \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} dx = \\ &= \frac{1}{2} f_0 (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} f_1 (x_1 - x_0) = \frac{1}{2} (f_0 + f_1) (b - a) = \\ &= \frac{1}{2} (f_0 + f_1) h \end{aligned}$$

Resto:

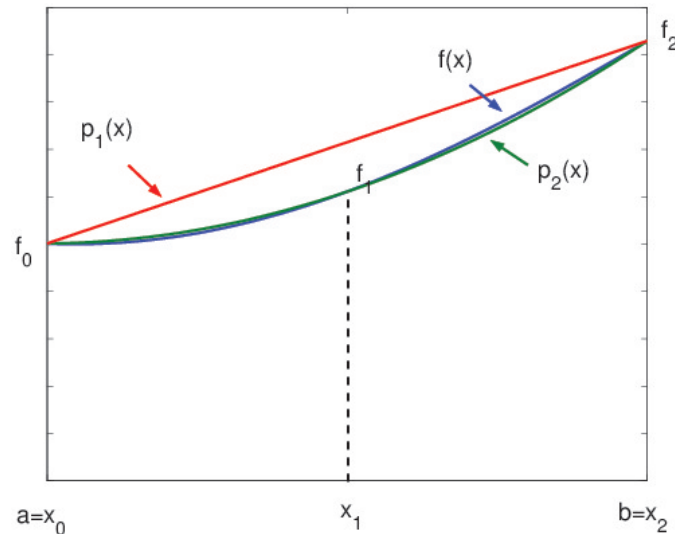
$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x)) dx \underbrace{\equiv}_{\downarrow} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]$$

Teorema
della media

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n + 1 = 3, \quad \nu = 3, \quad f \in C^4[a, b]$$

Si approssima $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$.



Parte approssimante: $S_2(f) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

Resto: $R_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\tau) \quad \tau \in [a, b]$

Convergenza delle formule di quadratura

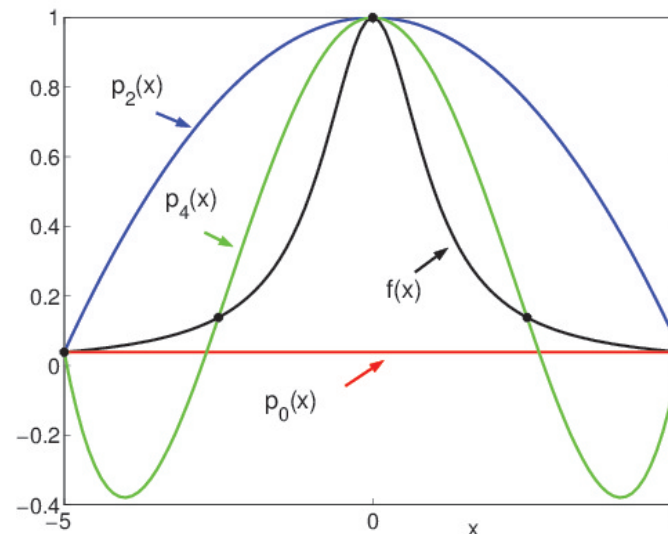
Convergenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = I(f) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0$$

- Al **crescere di n** il polinomio interpolatore potrebbe non convergere
 \Rightarrow anche la formula di quadratura potrebbe fornire **risultati inaccurati**.

Fenomeno di Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$



- \Rightarrow Le formule di quadratura interpolatorie **convergono** in tutti quei casi in cui **converge il polinomio interpolatore**.

Teorema. Sia $f \in C[a, b]$, $[a, b]$ limitato, sia $\{S_n(f)\}$ una **successione** di **formule di quadratura interpolatorie**

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) \quad \text{tale che} \quad \sum_{i=0}^n |c_i| \leq M \quad \forall n,$$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = I(f)$.

Nota 1. Per le formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** si ha

$$\sum_{i=0}^n |c_i| = \sum_{i=0}^n c_i = b - a$$

per cui l'ipotesi del **Teorema** è soddisfatta con $M = b - a$.

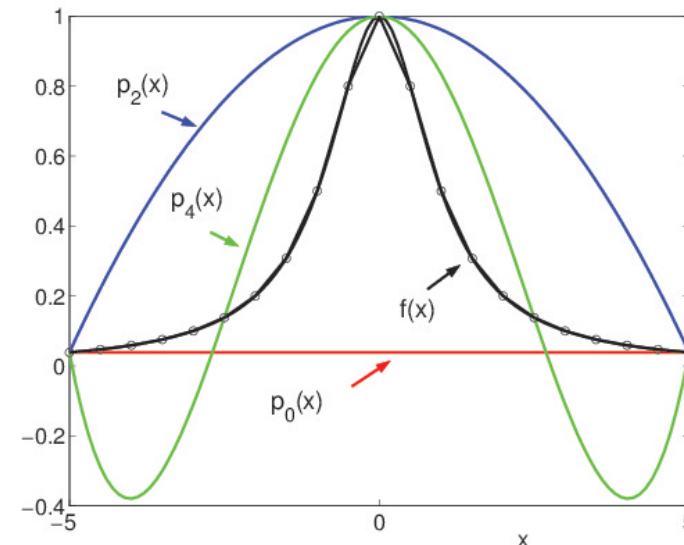
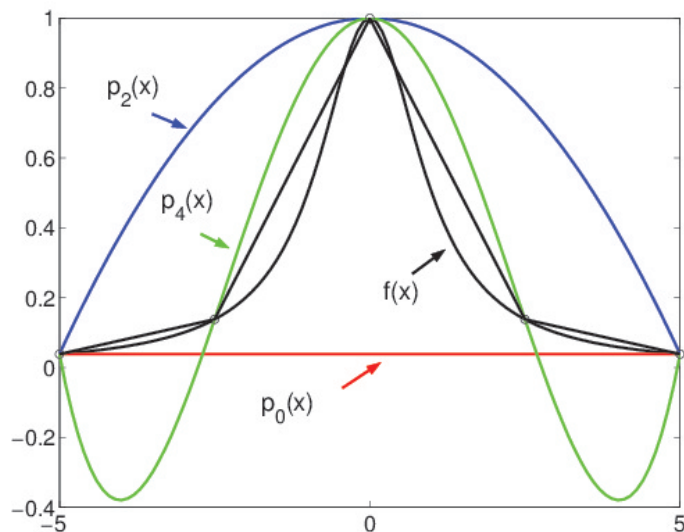


Ogni **successione** di formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** è **convergente**.

Nota 2. I coefficienti delle **formule di Newton-Cotes** sono **tutti positivi** se $n \leq 7$, mentre sono sia **positivi** che **negativi** per $n > 7$. I coefficienti delle **formule gaussiane** sono **tutti positivi** per ogni valore di n .

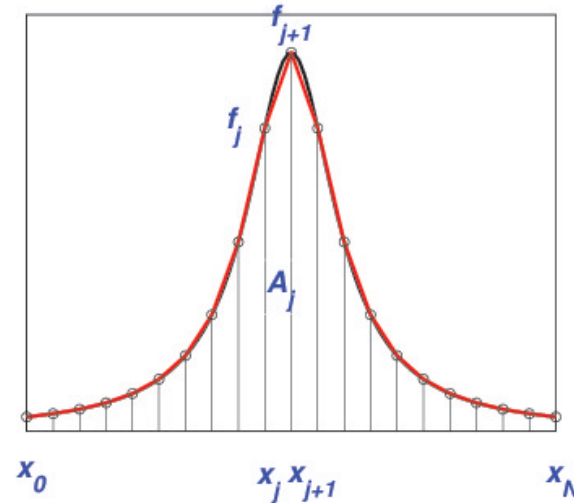
Formule di Newton-Cotes generalizzate

- Per $n > 7$ i coefficienti c_i delle formule di Newton-Cotes hanno segni sia **positivi** che **negativi** \rightarrow oltre a non essere garantita la convergenza, si può avere un'**amplificazione** degli errori sui dati, e quindi un'**instabilità numerica**.
- Per evitare l'uso di formule di Newton-Cotes di **grado elevato**, quando si dispone di un numero **elevato** di dati $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, \dots, n$, si divide l'intervallo di integrazione in N **sottointervalli** e si utilizza in ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes di **grado basso** (in genere di grado **1** o **2**).



Formula dei trapezi

L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree dei **trapezi** A_j .



In ogni **sottointervallo** $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, si applica la **formula del trapezio** con $h = \frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1}) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(-\frac{h^3}{12} \right) f''(\tau_j) \quad \tau_j \in [x_j, x_{j+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1}) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(-\frac{h^3}{12} \right) f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2} (f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{N-2} + f_{N-2} + f_{N-1} + f_N) - \left(\frac{h^3}{12} \right) \sum_{j=0}^{N-1} f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N \right) - \left(\frac{h^3}{12} \right) N f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]
\end{aligned}$$

Formula dei trapezi:

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_N(f) = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N \right) \\
R_N^T(f) = - \left(\frac{b-a}{12} \right) h^2 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]
\end{array} \right.$$

Grado di precisione: $\nu = 1$

Formula delle parabole

In ogni **sottointervallo** $[x_{2j}, x_{2(j+1)}]$, $j = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, si applica la **formula di Cavalieri-Simpson** con $h = \frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\tau_j) \\ &\qquad\qquad\qquad \tau_j \in [x_j, x_{j+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x) dx = \\
&= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 + \cdots + f_{N-2} + f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N) - \\
&\quad - \left(\frac{h^5}{90} \right) \sum_{j=0}^{N/2-1} f^{(4)}(\tau_j) = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N \right) - \left(\frac{h^5}{90} \right) \frac{N}{2} f^{(4)}(\tau)
\end{aligned}$$

Formula delle parabole:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_N(f) = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N \right) \\ R_N^P(f) = - \left(\frac{b-a}{180} \right) h^4 f^{(4)}(\tau) \quad \tau \in [a, b] \end{array} \right.$$

Grado di precisione: $\nu = 3$

Nota. Per poter usare la formula delle parabole il **numero di nodi** $N + 1$ deve essere **dispari**.

Convergenza delle formule dei trapezi e delle parabole

Formula dei trapezi:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(f) = I(f) \iff \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^T(f) = 0$$

Se $f \in C^{(2)}[a, b]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N^T(f) \underset{h = \frac{b-a}{N}}{\equiv} \lim_{h \rightarrow 0} R_N^T(f) = \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{b-a}{12} \right) h^2 f''(\tau) = 0$$

Formula delle parabole:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(f) = I(f) \iff \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^P(f) = 0$$

Se $f \in C^{(4)}[a, b]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N^P(f) \underset{h = \frac{b-a}{N}}{\equiv} \lim_{h \rightarrow 0} R_N^P(f) = \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{b-a}{180} \right) h^4 f^{(4)}(\tau) = 0$$

Esempio

Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_i	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v_i	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

Traccia della soluzione.

La lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$. Quindi si può approssimare la lunghezza della pista con una **formula di quadratura generalizzata**.

Formula dei trapezi:
$$L \approx 3 \left(v_0 + 2 \sum_{i=1}^{13} v_i + v_{14} \right) = 9855$$

Formula delle parabole:
$$L \approx 2 \left(v_0 + 4 \sum_{i=0}^6 v_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^6 v_{2i} + v_{15} \right) = 9858$$

Esempio: errore di propagazione

Assumendo che per l'**errore sui dati** valga la limitazione $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon = 0.5$, per l'**errore di propagazione** si ottiene la maggiorazione:

$$|R_n^*(f)| = \left| \sum_{i=0}^n \varepsilon_i c_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |\varepsilon_i| |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |c_i|$$

Poiché entrambe le formule di quadratura hanno **coefficienti** c_i **positivi** si ha

$$|R_n^*(f)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n c_i = \varepsilon (b - a) = 0.5 \cdot 84 = 42$$

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 7 §§ **7.1, 7.2, 7.3 (escluse formule di Newton-Cotes aperte), 7.4**

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*: **4.9, 4.10, 7.3, 7.17, 7.23, 7.47, 7.48, 7.82**