Calcolo Numerico
con elementi di programmazione

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni sui metodi
per la soluzione di
equazioni non lineari

Problema 1

La **pressione** richiesta per affondare nella sabbia un oggetto largo e pesante può essere **predetta** misurando la pressione richiesta per affondare oggetti più piccoli nello stesso tipo di terreno.
La pressione p richiesta per affondare fino alla profondità d un **piatto circolare** di raggio r può essere approssimata da un'equazione del tipo

$$p(r) = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

dove k_1, $k_2 > 0$ e k_3 sono costanti che dipendono da d e dalla compattezza della sabbia, ma non da r.
Dalle **misure** effettuate è noto che per affondare di **30 cm** nella sabbia bagnata un piatto di raggio **2.5 cm** è richiesta una pressione di **0.78 kg/cm^2**, per affondare un piatto di raggio **5 cm** è richiesta una pressione di **0.93 kg/cm^2** e per affondare un piatto di raggio **7 cm** è richiesta una pressione di **1.16 kg/cm^2**, **determinare** i valori k_1, k_2 e k_3. Si assuma che lo strato sabbioso sia più profondo di 30 cm.
Usare i valori di k_1, k_2 e k_3 trovati per **predire** la dimensione minima richiesta affinché un piatto circolare possa sostenere un peso di **250 kg** in modo da non affondare più di **30 cm**.

Dati del problema:

piatto	raggio (cm)	pressione (kg/cm^2)	profondità (cm)
1	r_1=2.5	p_1=0.78	d=30
2	r_2=5	p_2=0.93	d=30
3	r_3=7	p_3=1.16	d=30

Modello matematico: $p(r) = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$

Primo piatto: $p_1 = k_1 e^{k_2 r_1} + k_3 r_1$
Secondo piatto: $p_2 = k_1 e^{k_2 r_2} + k_3 r_2$
Terzo piatto: $p_3 = k_1 e^{k_2 r_3} + k_3 r_3$

Per trovare k_1, k_2 e k_3 dalle misure effettuate bisogna risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} 0.78 - k_1 e^{2.5\,k_2} - 2.5\,k_3 = 0 \\ 0.93 - k_1 e^{5\,k_2} - 5\,k_3 = 0 \\ 1.16 - k_1 e^{7\,k_2} - 7\,k_3 = 0 \end{cases}$$

Per **predire** il valore del raggio minimo r una volta noti k_1, k_2 e k_3, bisogna risovere l'**equazione non lineare** $\frac{250}{\pi r^2} = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$

Problema 2

Il problema di due specie che competono per la stessa quantità di cibo può essere descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[2 - 0.0002\,y(t) - 0.0001\,x(t)] \\ y'(t) = y(t)[4 - 0.0003\,y(t) - 0.0004\,x(t)] \end{cases}$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ rappresentano le popolazioni delle due specie al tempo t.

Trovare i valori di **equilibrio** delle due specie.

Soluzione

Si devono trovare i valori di $x(t)$ e $y(t)$ che risolvono **simultaneamente** le equazioni

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x[2 - 0.0002\, y - 0.0001\, x] = 0 \\ y' = y[4 - 0.0003\, y - 0.0004\, x] = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = 2\, x - 0.0002\, x\, y - 0.0001\, x^2 = 0 \\ g(x, y) = 4\, y - 0.0003\, y^2 - 0.0004\, x\, y = 0 \end{cases}$$

Nota: le soluzioni $x = y = 0$, $x = 0$ e $y = 13'333$, $x = 20'000$ e $y = 0$ sono **soluzioni banali** (una o tutte e due le specie si sono estinte)

Problema 3

La **crescita di una popolazione** può essere modellata, su un periodo di tempo piccolo, assumendo che la popolazione abbia un tasso di crescita proporzionale al numero di individui presenti in ciascun istante. Se $N(t)$ indica il **numero di individui** al tempo t e λ è il **fattore di crescita** della popolazione, allora $N(t)$ soddisfa l'**equazione differenziale**

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t).$$

La **soluzione analitica** di questa equazione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, dove N_0 indica la popolazione iniziale.
Questo modello è valido solo quando la popolazione è isolata e non c'è immigrazione dall'esterno. Se si suppone che ci sia una **immigrazione a un tasso costante** ν, il modello differenziale diventa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \nu$$

la cui **soluzione analitica** è $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$.

Supponendo che la popolazione iniziale sia di **un milione di individui**, che la comunità cresca di 435˙000 **immigrati** il primo anno e che 1˙564˙000 **individui** siano presenti alla fine del **primo anno**, **determinare** il tasso di crescita λ della popolazione.

Dati del problema:

individui iniziali:	$N_0 = 1˙000˙000$
individui dopo un anno:	$N(1\,anno) = 1˙564˙000$
tasso di immigrazione:	$\nu = 435˙000$

Modello matematico: $N(1\,anno) = N_0\,\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)$

Per trovare λ bisogna risolvere l'**equazione non lineare**

$$\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Nota: la popolazione è espressa in milioni

Sistemi di equazioni non lineari

Un **sistema di equazioni non lineari** può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Supporremo che le **funzioni** $f_i : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, siano almeno **continue** in D.

Le **soluzioni** del sistema sono i vettori $\mathbf{\Xi} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ che **annullano simultaneamente** tutte le n equazioni.

Oss.
Nel **problema 1**, $n = 3$ e $[x_1, x_2, x_3] = [k_1, k_2, k_3]$.
Nel **problema 2**, $n = 2$ e $[x_1, x_2] = [x, y]$.
Nel **problema 3**, $n = 1$ e $[x_1] = [\lambda]$.

Caso $n = 1$: equazioni non lineari

Un'**equazione non lineare** è un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

Le **soluzioni** ξ dell'equazione, cioè quei valori tali che

$$f(\xi) = 0$$

vengono chiamate **radici** dell'equazione non lineare o **zeri** della funzione f.

Ci limiteremo al caso di **radici reali**: $\xi \in \mathbf{R}$.

Separazione delle radici

In genere, le **equazioni non lineari** che nascono nelle applicazioni non possono essere **risolte analiticamente**. Per **approssimare le radici** è necessario ricorrere a un **metodo numerico**.

Prima di utilizzare un metodo numerico bisogna sapere:
- **quante** sono le radici (reali);
- **dove** si trovano approssimativamente;
- se ci sono delle **simmetrie**.

Per rispondere a queste domande si può ricorrere alla **tabulazione** o al **grafico** della funzione f.
L'individuazione di un intervallo $I = [a, b]$ contenente **una sola radice** è la fase nota come **separazione delle radici**.

Una volta separata una radice ξ si passa alla **seconda fase** che consiste nella costruzione di un'opportuna **successione x_n di approssimazioni** di ξ che converge alla **radice ξ** al divergere di n.

Problema 3: Separazione grafica delle radici

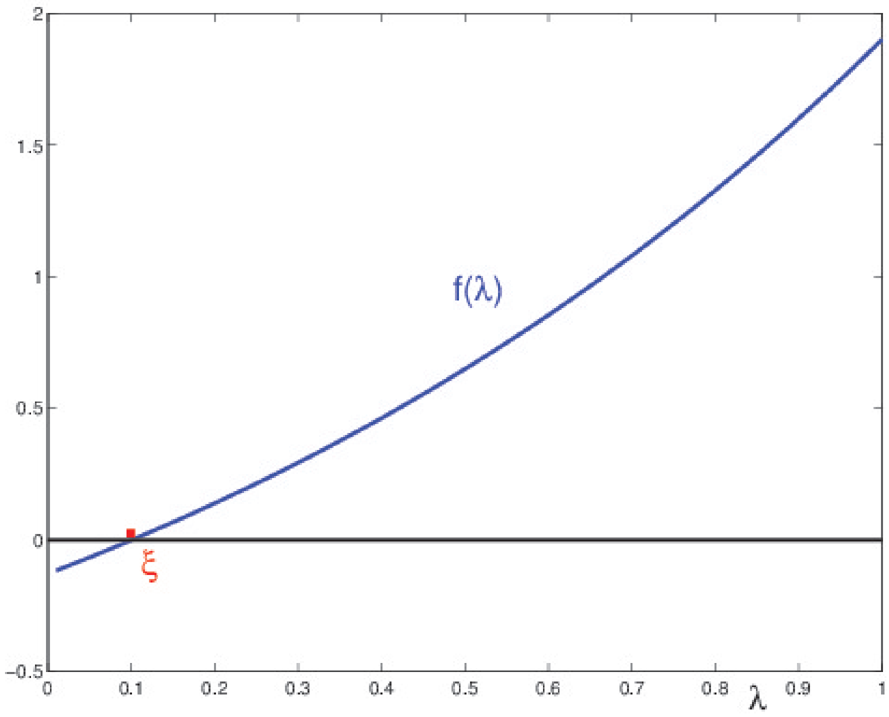
$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Separazione grafica: si traccia il **grafico della funzione** e si individuano gli intervalli in cui la funzione **interseca l'asse delle ascisse**.

La funzione f risulta definita e continua in $\mathcal{R} - \{0\}$. Inoltre, da uno studio preliminare di f nel **semiasse positivo**, si ha

- $lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) < 0$
- $lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = +\infty$
- $f'(\lambda) > 0$, ossia la funzione è **monotona crescente**

e quindi si può concludere che f ha un **unico zero** ξ nel semiasse positivo.



Osservando il grafico di f è possibile determinare un intorno di ξ:

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.05, 0.15]$

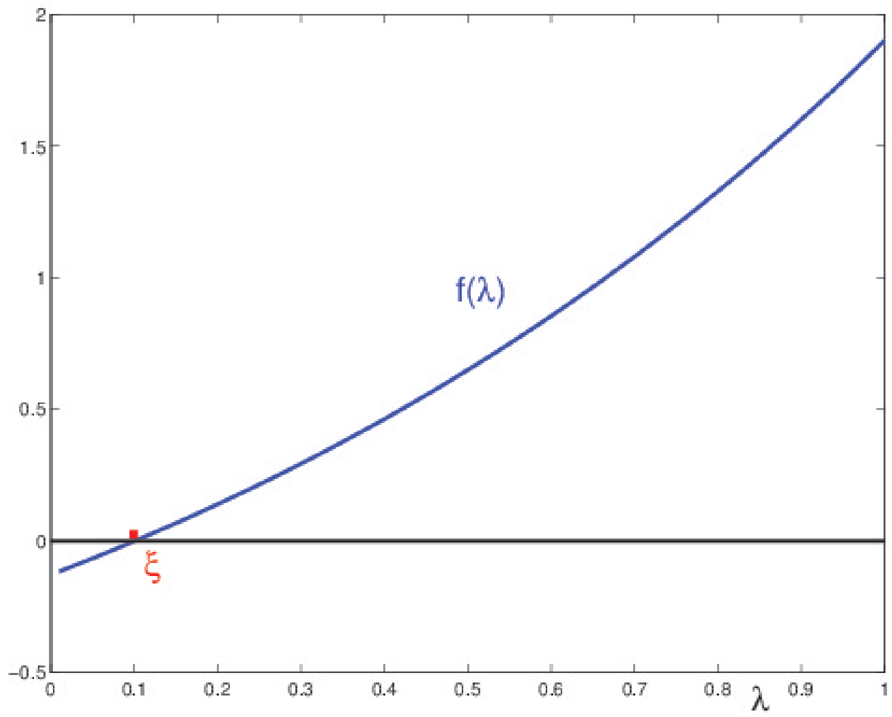
$\Rightarrow f(a) \approx -0.0667, f(b) \approx 0.0672 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$

Problema 3: Separazione grafica delle radici

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Separazione grafica in Matlab

```
>> x=linspace(0,1);
>> f=exp(x)+0.435./x.*(exp(x)-1)-1.564;
Warning: Divide by zero.


>> plot(x,f,x,zeros(1,length(x)))
```



Problema 3: Separazione delle radici - tabulazione

Si **valuta** la funzione in corrispondenza di **valori equidistanti** della variabile λ in un certo intervallo e si **osserva** il segno dei valori ottenuti:

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

λ	f(λ)
0.10	-0.00133558829528
0.12	0.02567293855461
0.14	0.05319595959218
0.16	0.08124355150079
0.18	0.10982599066618
0.20	0.13895375715854

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.10, 0.12]$

$\Rightarrow f(a) \approx -0.0013, f(b) \approx 0.0257 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$

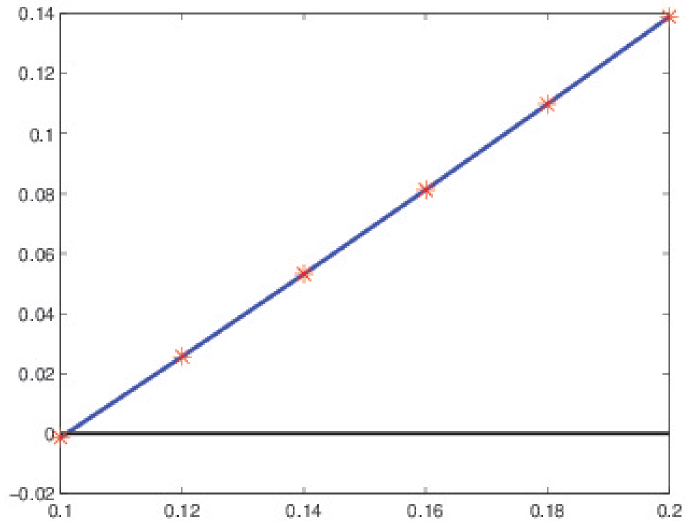
Problema 3: Separazione delle radici - tabulazione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Tabulazione in Matlab

```
>> x=linspace(0,1,11)

x =
   0   0.1000   0.2000   0.3000   0.4000   0.5000   0.6000   0.7000   0.8000   0.9000 1.0000

>> f=exp(x)+0.435./x.*(exp(x)-1)-1.564
Warning: Divide by zero.

f =
   NaN  -0.0013   0.1390   0.2932   0.4627   0.6491   0.8542   1.0797   1.3279   1.6011   1.9017

>> x=linspace(0.1,0.2,6)

x =
    0.1000    0.1200    0.1400    0.1600    0.1800    0.2000

>> f=exp(x)+0.435./x.*(exp(x)-1)-1.564

f =
   -0.0013    0.0257    0.0532    0.0812    0.1098    0.1390
```

```
>> format long
>> [x' f']

ans =

   0.10000000000000  -0.00133558829528
   0.12000000000000   0.02567293855461
   0.14000000000000   0.05319595959218
   0.16000000000000   0.08124355150079
   0.18000000000000   0.10982599066618
   0.20000000000000   0.13895375715854
```



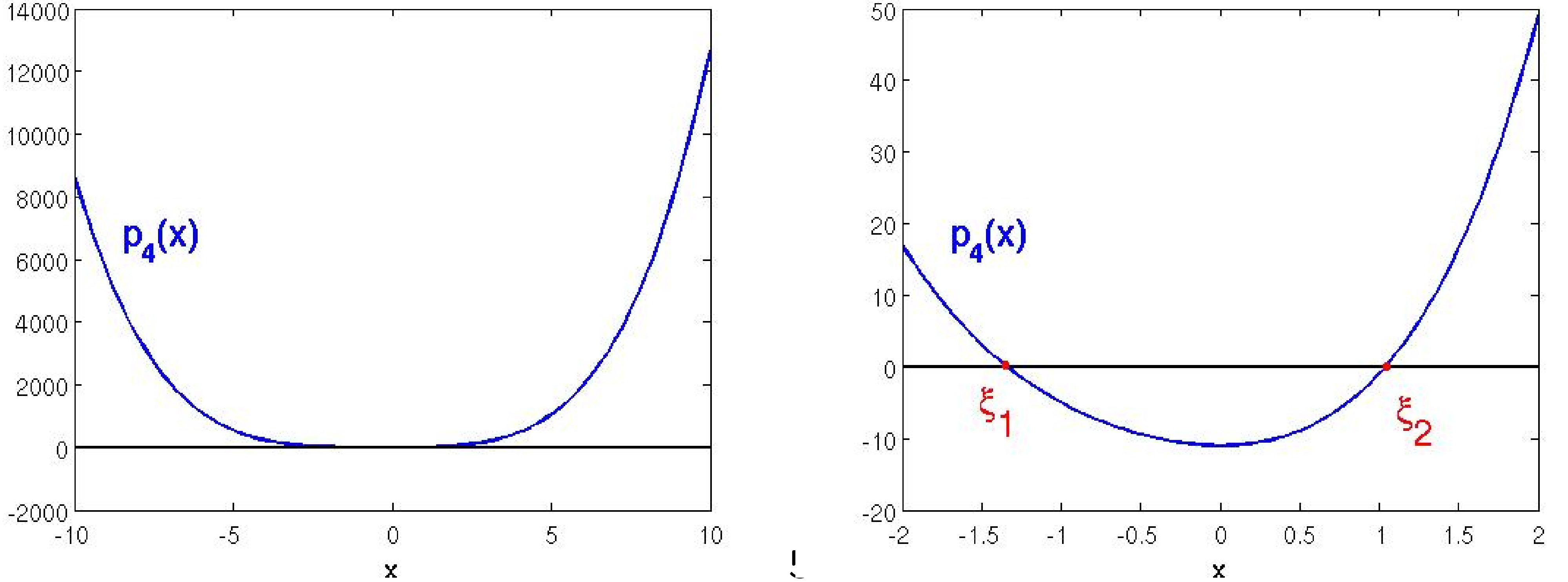

```
>> plot(x,f,'b-',[0.1 0.2], [0 0],'k',x,f,'*r')
```

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.10, 0.12]$

$\Rightarrow f(a) \approx -0.0013, f(b) \approx 0.0257 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$

Separazione delle radici: Esempio 1

Equazioni polinomiali: $p_4(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 11 = 0$




```
>> x=linspace(-10,10);
>> f=x.^4+2*x.^3+7*x.^2-11;
>> plot(x,f,x,zeros(1,length(x)))
```

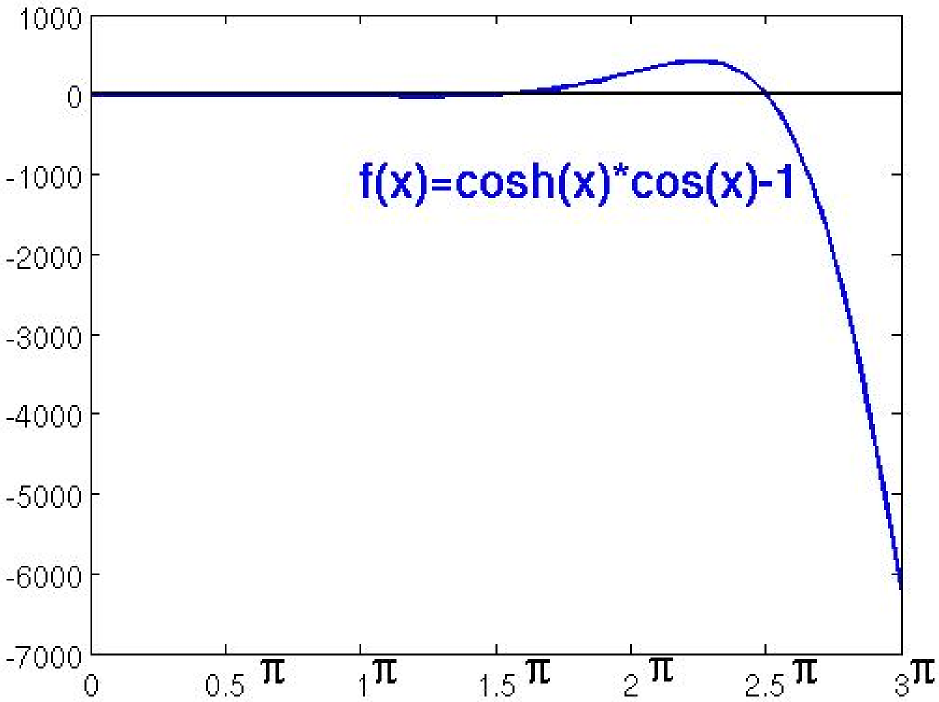
```
>> x=linspace(-2,2);
>> f=x.^4+2*x.^3+7*x.^2-11;
>> plot(x,f,x,zeros(1,length(x)))
```

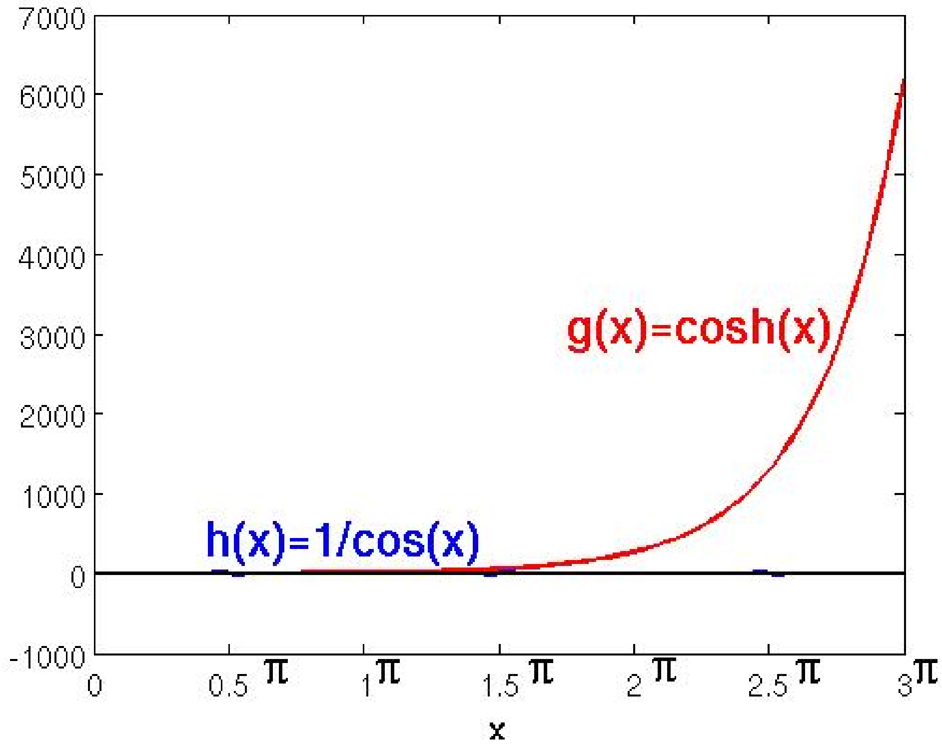
Delle **4 radici** di $p_4(x)$ **due** sono **reali**, $\xi_1 \in [-1.5, -1]$ e $\xi_2 \in [0.75, 1.25]$, mentre **due** sono **complesse coniugate**.

Separazione delle radici: Esempio 2

Equazione trascendente: $f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$

La funzione $f(x)$ è **simmetrica** rispetto all'origine $\Rightarrow$ se ξ è **radice** lo è anche $-\xi$ $\Rightarrow$ $x > 0$ ($\xi = 0$ è radice banale)





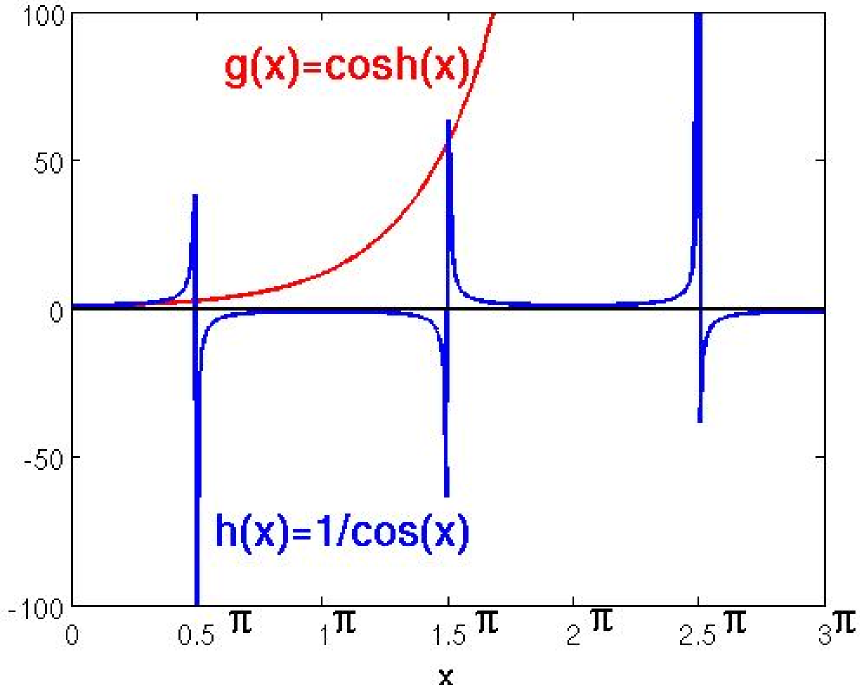

```
>> x=linspace(0,3*pi);
>> f=cosh(x).*cos(x)-1;
>> plot(x,f,x,zeros(1,length(x)))
```

```
>> x=linspace(0,3*pi);
>> g=cosh(x);
>> h=1./cos(x);
>> plot(x,g,'r',x,h,'b',x,zeros(1,length(x)),'k')
```

Separazione delle radici: Esempio 2

Equazione trascendente: $f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$

A volte è possibile riformulare il problema della ricerca degli zeri di f nella ricerca delle ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle funzioni g e h, con $f = g - h$




```
>> axis([0 3*pi -100 100])
```

```
>> x=linspace(0,3*pi,300);
>> g=cosh(x);
>> h=1./cos(x);
>> plot(x,g,'r',x,h,'b',x,zeros(1,length(x)),'k')
>> axis([0 3*pi -100 100])
```

Separazione delle radici: Esempio 2

Ci sono **infinite radici**, che corrispondono alle **intersezioni** delle due curve h e g:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = g(x)$$

Separazione delle radici: in ciascun intervallo

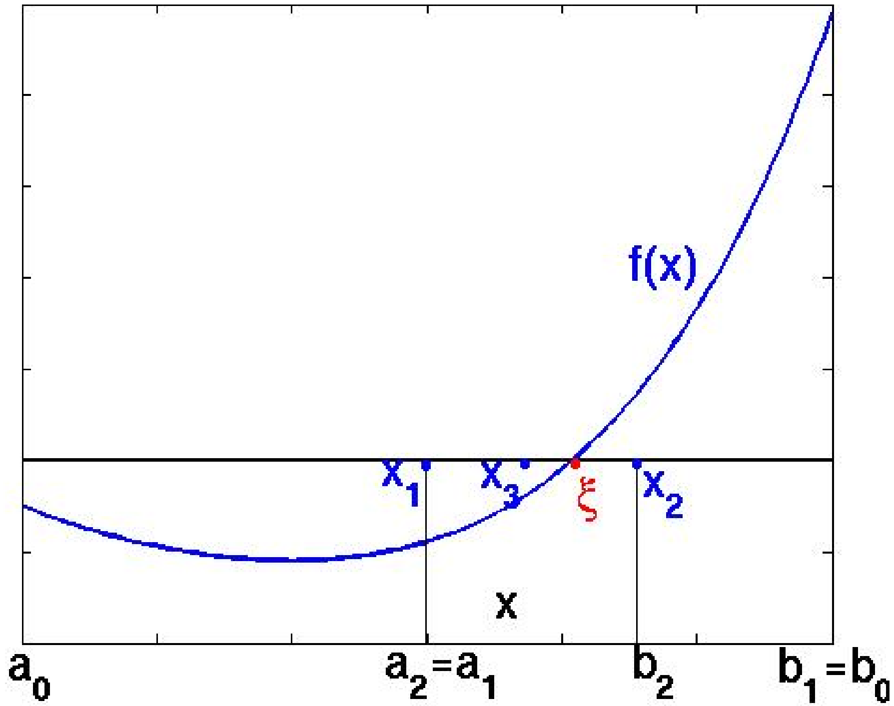
$$\left[\left(2k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right], \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

ci sono **due** radici. Per $k \to \infty$ le due radici si avvicinano ai due estremi dell'intervallo.

Nota. Molto spesso nelle applicazioni interessa approssimare la radice **più piccola**.

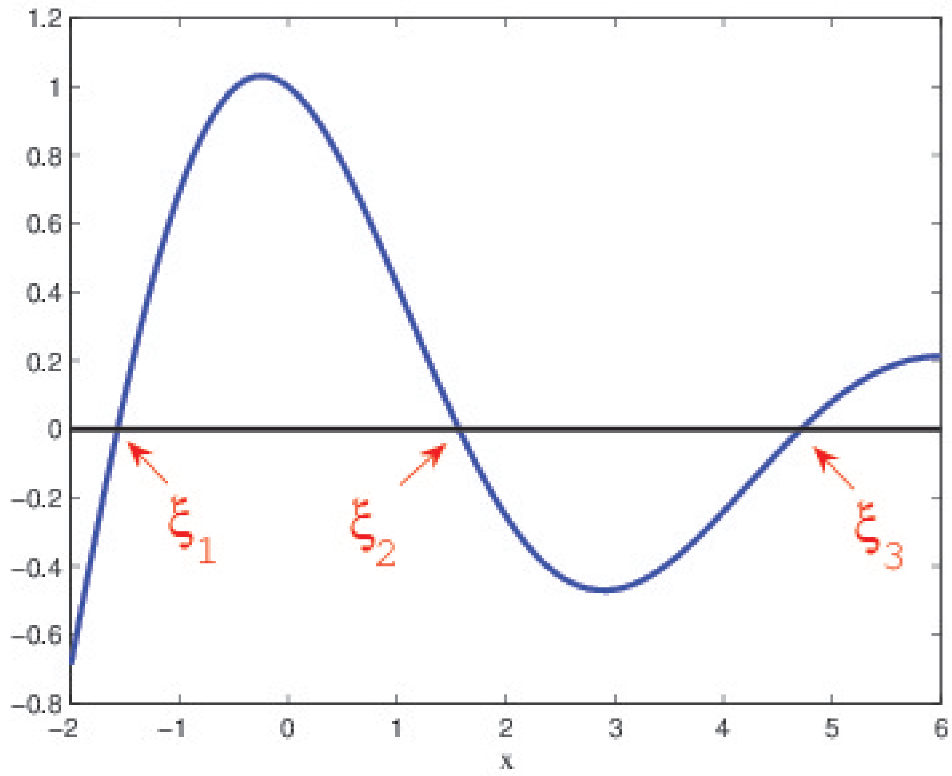
Metodo di bisezione (o metodo dicotomico)

Metodo:



Esempio:

$f(x) = \mathrm{e}^{-x/4} \cos(x)$

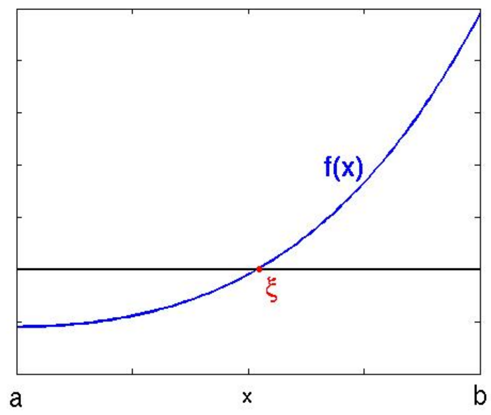


Metodo di bisezione (o metodo dicotomico)

Il **metodo di bisezione** è un metodo molto **semplice**: una volta individuato un intervallo di separazione in cui si trova **una sola** radice, permette di costruire una **successione** $\{x_k\}$ di **approssimazioni** di ξ.

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;
- la funzione f è **continua** in I: $f \in C^0[a, b]$;
- $f(a)f(b) < 0$.

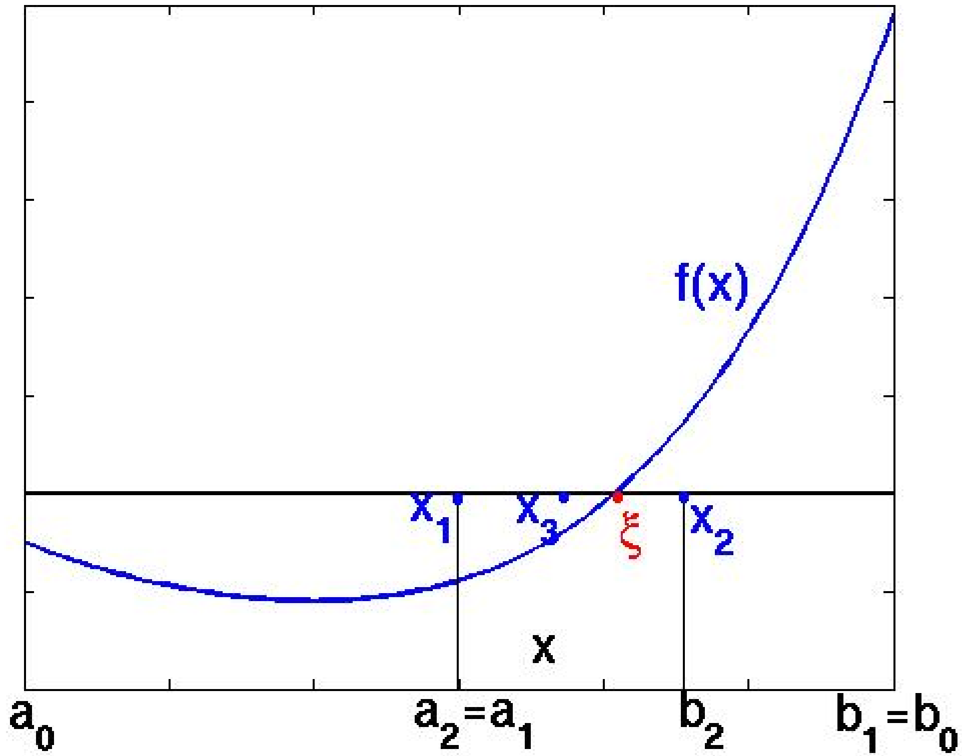


Metodo di bisezione: algoritmo

Si genera una **successione** di approssimazioni $\{x_k\}$ con

$x_k \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$ e

$\xi \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$.



Algoritmo:

$a_0 = a, \quad b_0 = b$

per $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\quad x_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ (**punto medio** di $[a_{k-1}, b_{k-1}]$)

$\quad$ se $f(x_k) = 0$, allora stop

$\quad$ se $f(a_{k-1})f(x_k) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, x_k]$

$\quad$ se $f(x_k)f(b_{k-1}) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [x_k, b_{k-1}]$

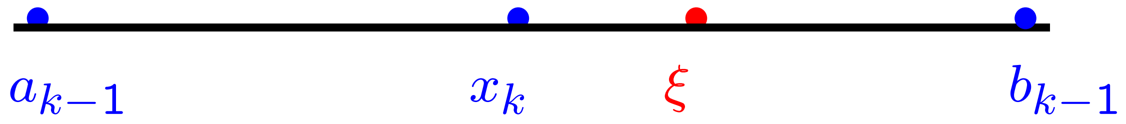
Convergenza del metodo di bisezione

Errore di troncamento: $e_k = \xi - x_k$
è l'errore che si commette approssimando la radice ξ con il k-esimo elemento della successione costruita usando l'algoritmo descritto precedentemente.

Il procedimento iterativo converge alla radice ξ se la successione $\{x_k\}$ converge a ξ per $k \to \infty$

Convergenza: $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} |e_k| = 0$

Per il **metodo di bisezione** si ha



Alla $k - esima$ iterazione $\xi \in [x_k, b_{k-1}]$ oppure $\xi \in [a_{k-1}, x_k]$ per cui avremo che

$$|e_k| = |x_k - \xi| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b-a}{2^k}$$

dove si è tenuto conto che l' ampiezza dell'intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ è pari alla metà dell'ampiezza dell'intervallo $[a_{k-2}, b_{k-2}]$ costruito all'iterazione precedente. Per cui avremo

$$\lim_{k \to \infty} |e_k| < \lim_{k \to \infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$$

ovvero la **successione delle approssimazioni** è **convergente**.

Ordine di convergenza

Sia $\{x_k\}$ una **successione di approssimazioni** **convergente** a ξ. La successione ha **ordine di convergenza** p e **fattore di convergenza** C, se esistono due reali $p \geq 1$ e $C > 0$ tali che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

Nota. La convergenza si dice **lineare** se $p = 1$,
quadratica se $p = 2$.

Per n sufficientemente grande l'errore assoluto al passo $(k+1)-esimo$ si comporta come una potenza di ordine p dell'errore al passo precendente.

Metodo di bisezione: ordine di convergenza

Per $k \to \infty$ si ha

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^1} \simeq \frac{\frac{b-a}{2^k}}{\frac{b-a}{2^{k-1}}} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Ordine di convergenza**: 1 (**lineare**)

Fattore di convergenza: $\frac{1}{2}$

La convergenza è **lenta**, in quanto ad ogni passo l'**errore** viene **dimezzato**, cioè ad ogni passo si guadagna una **cifra binaria**

$\Rightarrow$ poiché $2^{-4} < 10^{-1} < 2^{-3}$, per guadagnare una **cifra decimale** servono 3-4 **iterazioni**.

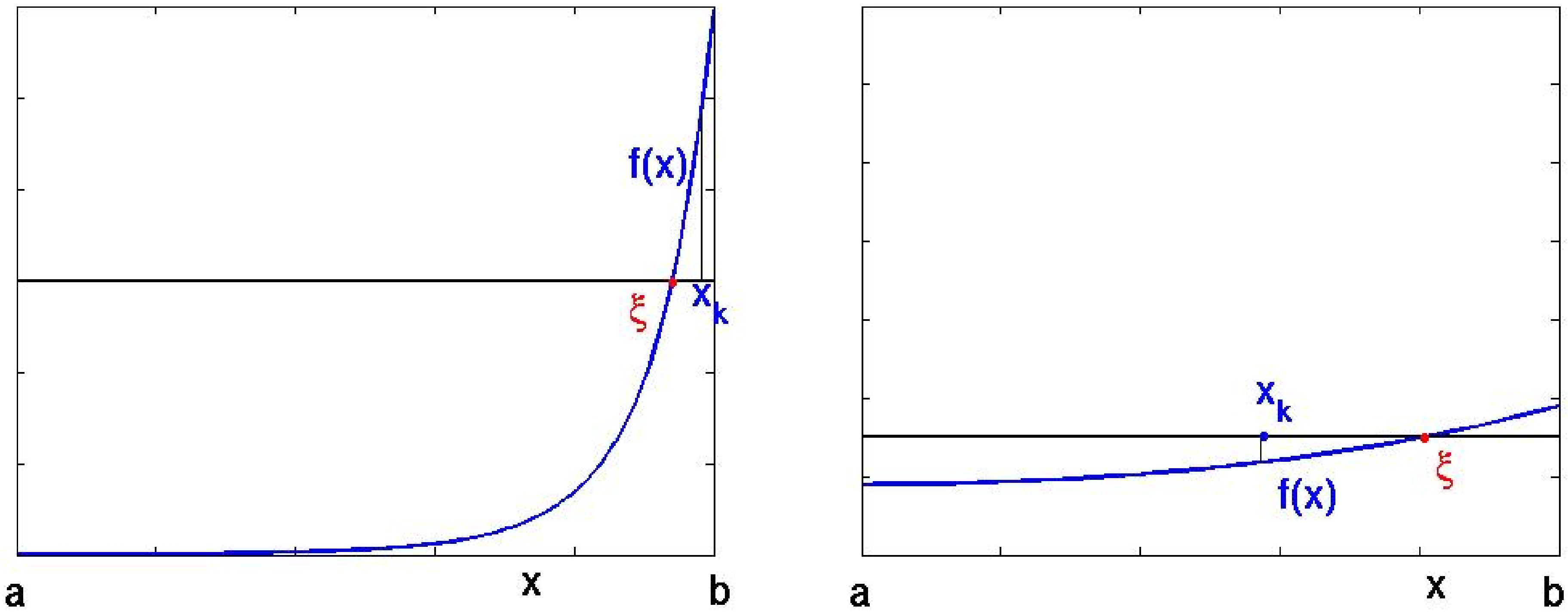
Metodo di bisezione: criteri di arresto

Nella pratica, a causa degli **errori di arrotondamento** e degli **errori di troncamento** non si verifica **mai** che $f(x_k) = 0$. Quando si arrestano le iterazioni?

Criteri di arresto a posteriori $\quad \begin{cases} |e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \\ \\ |f(x_k)| < \varepsilon \end{cases}$

Criteri di arresto a posteriori: esempi

$|e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ oppure $|f(x_k)| < \varepsilon$



$f(x_k)$ è "*grande*" anche se x_k è "*vicino*" a ξ

$f(x_k)$ è "*piccolo*" anche se x_k è "*lontano*" da ξ

Criterio di arresto a priori:

Usando l'espressione dell'errore di troncamento, è possibile dare una **stima a priori** del numero di iterazioni K necessario per ottenere un **errore minore** di ε è

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \qquad K > \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

Oss.: Poichè K deve essere un numero intero positivo, può essere posto uguale all'intero più grande e più vicino alla quantità a secondo membro dell'ultima disequazione.

Metodo di bisezione

Svantaggi

- **converge lentamente** alla soluzione (rispetto ai metodi che vedremo in seguito) cioè si devono fare molte iterazioni per avvicinarsi alla radice

- il metodo non trae alcun vantaggio da caratteristiche peculiari della funzione, come la sua derivabilità o la sua forma

Vantaggi

- **converge sempre** ad una soluzione

OSS: tale metodo spesso si usa per una prima diminuzione dellampiezza dellintervallo, poi ci si avvicina alla soluzione con metodi più veloci

Problema 3: soluzione

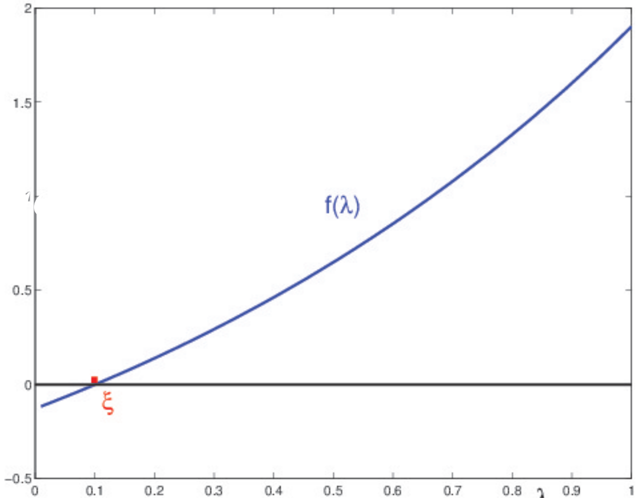
Si tratta di risolvere nell'incognita λ l'equazione non lineare

$$N|_{t=1\,\text{anno}} = N_0 e^{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

dove $N|_{t=1\,\text{anno}} = 1'564'000$, $N_0 = 1'000'000$, $\nu = 435'000$.

$$\Rightarrow \quad f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Separazione grafica



Intervallo di separazione:

$$I = [a, b] = [0.05, 0.15]$$
$$f(a) \approx -0.0667, f(b) \approx 0.0672 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$

Iterazioni

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	$\|f(x_k)\|$
1	0.05000000000000	0.15000000000000	0.10000000000000	10.00000000000000	10.00000000000000
2	0.10000000000000	0.15000000000000	0.12500000000000	0.02500000000000	0.03250506973938
3	0.10000000000000	0.12500000000000	0.11250000000000	0.01250000000000	0.01548498364220
4	0.10000000000000	0.11250000000000	0.10625000000000	0.00625000000000	0.00704990930651
5	0.10000000000000	0.10625000000000	0.10312500000000	0.00312500000000	0.00285098217571
6	0.10000000000000	0.10312500000000	0.10156250000000	0.00156250000000	0.00075615469668
7	0.10000000000000	0.10156250000000	0.10078125000000	0.00078125000000	0.00029010206821
8	0.10078125000000	0.10156250000000	0.10117187500000	0.00039062500000	0.00023292996053
9	0.10078125000000	0.10117187500000	0.10097656250000	0.00019531250000	0.00002861013771
10	0.10097656250000	0.10117187500000	0.10107421875000	0.00009765625000	0.00010215388987
11	0.10097656250000	0.10107421875000	0.10102539062500	0.00004882812500	0.00003677037077

Dalla tabella si osserva che se si sceglie $\varepsilon = 0.5 \cdot 10{-}4$ e si usa come criterio di arresto $f(x_k) < \varepsilon$, il procedimento iterativo si interrompe quando $k = 9$.

Scegliendo come criterio di arresto $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si arresta quando $k = 11$.

Per $k = 11$ è ovviamente soddisfatta anche la condizione $f(x_k) < \varepsilon$.

Usando, invece, il criterio di arresto a priori, si ha

$$K > log_2(0.10) - log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) \approx 10.9658$$

cioè $K = 11$.

Esercizio 1

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una **stima** del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

I step: separazione delle radici

Utilizziamo il **metodo grafico** per stabilire quante sono le radici reali di $f(L)$, con $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$.

Poniamo

$$h(L) = L \qquad \text{e} \qquad g(L) = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

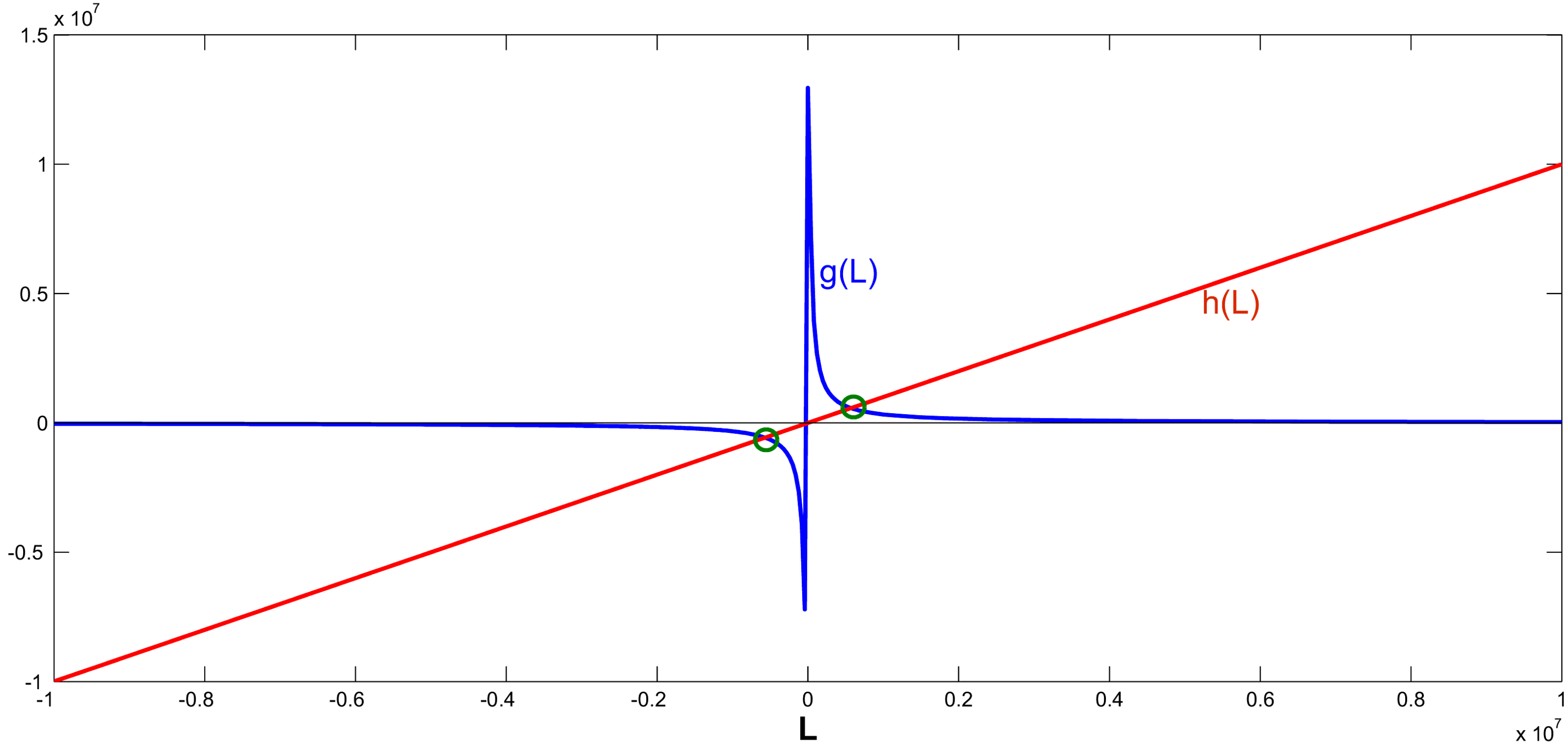
e visualizziamo i **punti di intersezione** tra le due funzioni.

Nota.

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Dal grafico si evince che le intersezioni sono due, una positiva e una negativa.

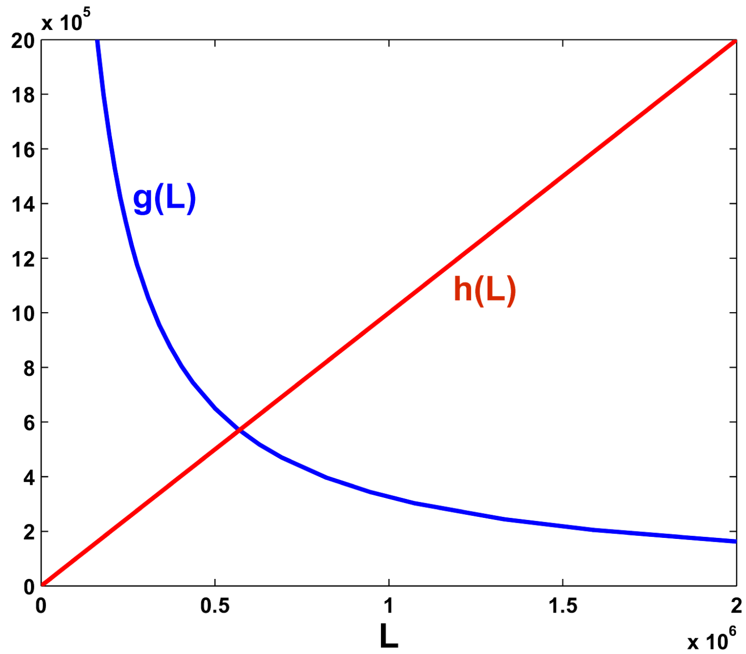
$$h(L) = L \qquad g(L) = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$



Poichè la lunghezza d'onda deve essere un **numero positivo**, si scarta la radice negativa.

Restringendo il grafico delle funzioni nell'intervallo $[0 \quad 2 \cdot 10^6]$, si osserva che la radice positiva è contenuta nell'intervallo

$$[.5 \cdot 10^6 \quad 1 \cdot 10^6] = [500,\ 1000] Km$$




```
>> T = 2880;
>> ag = 9.81;
>> h = @(L)[L];
>> g = @(L)[(ag*T^2)/(2*pi)*tanh(2*pi*d/L)];
>> figure, fplot(g,[0 2*10^6])
>> hold on, fplot(h,[0 2*10^6])
>> xlabel('L')
>> axis([0 2000000 -1 2000000])
```

Visualizzando le due funzioni per $L \in [0.5 \cdot 10^6, \quad 1 \cdot 10^6]$, si può ridurre ulteriormente l'intervallo in cui cercare la radice dell'equazione non lineare considerata, per esempio $[0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

A questo punto è possibile selezionare un metodo numerico per il calcolo della radice di $f(L) = 0$ nell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

II step: metodo di bisezione

Si verifica facilmente che la funzione $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$ è una funzione continua in tutto il dominio di definizione ed in particolare nell'intervallo $I = [a, b] = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$. Inoltre risulta

$$f(0.5 \cdot 10^6) = -150396.83597 \quad \text{e} \quad f(0.6 \cdot 10^6) = 57863.27995$$

(**Oss**. $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$)

da cui

$$f(a) f(b) < 0.$$

Quindi, sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del **metodo di bisezione** e possiamo costruire la **successione** x_n **di approssimazioni della radice** ξ.

Si calcola il punto

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5 \cdot 10^6 + 0.6 \cdot 10^6}{2} = 0.55 \cdot 10^6$$

si valuta la funzione f nel punto x_1, cioè $f(x_1) = -41356.18896 < 0$

quindi, si definisce il nuovo intervallo

$$I_1 = [x_1, b] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.6 \cdot 10^6]$$

che contiene la radice positiva di f.

L'errore di troncamento è

$$e_1 = |x_1 - x_0| = |x_1 - a| = 50000.$$

Si calcola il punto $x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{0.55 \cdot 10^6 + 0.6 \cdot 10^6}{2} = 0.575 \cdot 10^6$

si valuta la funzione f nel punto x_2, cioè $f(x_2) = 9321.48847 > 0$.

Il nuovo intervallo è $I_2 = [x_1, x_2] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.575 \cdot 10^6]$

mentre l'errore di troncamento diventa

$$e_2 = |x_2 - x_1| = 25000.$$

Procedendo in questo modo si ha

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0.55\cdot10^6+0.575\cdot10^6}{2} = 0.5625\cdot10^6$$

$$f(x_3) = -15732.61210 < 0,$$

$$e_3 = |x_3 - x_2| = |0.5625\cdot10^6 - 0.575\cdot10^6| = 12500$$

e $$I_3 = [x_3, x_2] = [0.5625\cdot10^6,\ 0.575\cdot10^6]$$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{0.5625 \cdot 10^6 + 0.575 \cdot 10^6}{2} = 0.56875 \cdot 10^6$$

$$f(x_4) = -3136.71786 < 0,$$

$$e_4 = |x_4 - x_3| = |0.56875 \cdot 10^6 - 0.5625 \cdot 10^6| = 6250$$

e $$I_4 = [x_4, x_2]$$

e così via.

Si osserva che l'errore e_k si dimezza ad ogni iterazione, cioè $\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}$.

Quindi, richiedendo un errore almeno di

$$\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5},$$

sono necessarie K iterazioni con

$$K > \frac{log(b-a) - log(\varepsilon)}{log(2)} = \frac{log(0.1 \cdot 10^{6}) - log(0.5 \cdot 10^{-5})}{log(2)} \approx 35$$

affinchè il metodo converga alla soluzione con la precisione fissata.

k	estremo inferiore	estremo superiore	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	500000.00000000000	600000.00000000000	550000.00000000000	$50 \cdot 10^3$	41536.18896
2	550000.00000000000	600000.00000000000	575000.00000000000	$25 \cdot 10^3$	9321.48847
3	550000.00000000000	575000.00000000000	562500.00000000000	$12.5 \cdot 10^3$	15732.61210
4	562500.00000000000	575000.00000000000	568750.00000000000	$6.250 \cdot 10^3$	3136.71786
5	568750.00000000000	575000.00000000000	571875.00000000000	$3.125 \cdot 10^3$	3109.31488
6	568750.00000000000	571875.00000000000	570312.50000000000	$1.5625 \cdot 10^3$	9.43440
7	570312.50000000000	571875.00000000000	571093.75000000000	$7.8125 \cdot 10^2$	1551.00265
8	570312.50000000000	571093.75000000000	570703.12500000000	$3.9062 \cdot 10^2$	771.05027
9	570312.50000000000	570703.12500000000	570507.81250000000	$19.5312 \cdot 10^1$	380.87454
10	570312.50000000000	570507.81250000000	570410.15625000000	97.6562	185.73673
11	570312.50000000000	570410.15625000000	570361.32812500000	48.8281	88.15533
12	570312.50000000000	570361.32812500000	570336.91406250000	24.4141	39.36151
13	570312.50000000000	570336.91406250000	570324.70703125000	12.2070	14.96382
14	570312.50000000000	570324.70703125000	570318.60351562500	6.1035	2.76477
15	570312.50000000000	570318.60351562500	570315.55175781250	3.0518	3.33480
16	570315.55175781250	570318.60351562500	570317.07763671875	1.5259	0.28501
17	570317.07763671875	570318.60351562500	570317.84057617187	$7.6 \cdot 10^{-1}$	1.23988
18	570317.07763671875	570317.84057617187	570317.45910644531	$3.8 \cdot 10^{-1}$	0.47744
19	570317.07763671875	570317.45910644531	570317.26837158203	$1.9 \cdot 10^{-1}$	0.09622
20	570317.07763671875	570317.26837158203	570317.17300415039	$9.5 \cdot 10^{-2}$	0.09439
21	570317.17300415039	570317.26837158203	570317.22068786621	$4.8 \cdot 10^{-2}$	0.00091
22	570317.17300415039	570317.22068786621	570317.19684600830	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.04674
23	570317.19684600830	570317.22068786621	570317.20876693726	$1.192 \cdot 10^{-2}$	0.02292
24	570317.20876693726	570317.22068786621	570317.21472740173	$6 \cdot 10^{-3}$	0.01100
25	570317.21472740173	570317.22068786621	570317.21770763397	$3 \cdot 10^{-3}$	0.00505
26	570317.21770763397	570317.22068786621	570317.21919775009	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.00207
27	570317.21919775009	570317.22068786621	570317.21994280815	$7.4 \cdot 10^{-4}$	0.00059
28	570317.21994280815	570317.22068786621	570317.22031533718	$3.7 \cdot 10^{-4}$	0.00017
29	570317.21994280815	570317.22031533718	570317.22012907267	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.00021
30	570317.22012907267	570317.22031533718	570317.22022220492	$9.3 \cdot 10^{-5}$	0.00002
31	570317.22022220492	570317.22031533718	570317.22026877105	$4.7 \cdot 10^{-5}$	0.00007
32	570317.22022220492	570317.22026877105	570317.22024548799	$2.3 \cdot 10^{-5}$	0.00003
33	570317.22022220492	570317.22024548799	570317.22023384646	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.000003
34	570317.22022220492	570317.22023384646	570317.22022802569	$0.6 \cdot 10^{-5}$	0.000009
35	570317.22022802569	570317.22023384646	570317.22023093607	$0.3 \cdot 10^{-5}$	0.000003

Se come criterio di arresto avessimo usato

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon,$$

la soluzione prodotta sarebbe quella corrispondente a $k = 33$ nella tabella precedente.

Infine, si osserva che il **metodo di bisezione non converge in modo monotono**.

Esercizio 2

Esempio 3.2.1 (Libro) Stabilire quante radici ammette l'equazione

$$f(x) = log(x+1) + \sqrt{x+2} - 1 = 0$$

La funzione è definita e continua nell'intervallo $(-1, +\infty)$.
Inoltre, poichè

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$$

la funzione è monotona crescente nel suo dominio di definizione e quindi ha un unico zero in $(1; +\infty)$.
Inoltre, si osserva che $\forall x \geq 0 \quad f(x) > 0$, quindi lo zero di f sicuramente appartiene all'intervallo $(-1; 0]$.
Come **intervallo di separazione** si può scegliere

$$I = [a, b] = [-1/2, 0]$$

in quanto $f(-1/2) = -0.4684 < 0$ e $f(0) = 0.41421 > 0$

Applicando il **metodo di bisezione** si ha

$$a_0 = -\frac{1}{2}, b_0 = 0, \quad x_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = -\frac{1}{4}, \quad f(x_1) = 0.035194, \quad e_1 = 0.25$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0, \quad b_1 = x_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = -\frac{3}{8}, \quad f(x_2) = -0.19525, \quad e_1 = 0.125$$

$$\Rightarrow a_2 = x_2, \quad b_2 = b_1$$

$$\cdots$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$	$\mathbf{e_k}$
1	-0.2500000	0.0351936	0.250000
2	-0.3750000	-0.1952488	0.1250000
3	-0.3125000	-0.0756553	0.0625000
4	-0.2812500	-0.0192306	0.0312500
5	-0.2656250	0.0082212	0.0156250
6	-0.2734375	-0.0054435	0.0078125
7	-0.2695313	0.0014040	0.0039063
8	-0.2714844	-0.0020160	0.0019531
9	-0.2705078	-0.0003050	0.0009766

Dopo 9 iterazioni, l'approssimazione prodotta produce un errore dell'ordine di 10^{-3}.

Il numero di iterazioni K necessarie affinchè la soluzione prodotta sicuramente abbia una certa precisione ε può essere stimato a priori mediante la formula:

$$K > \frac{log(b-a) - log(\varepsilon)}{log(2)} = \frac{log(0.5) - log(0.5 \cdot 10^{-3})}{log(2)} \approx 9.9658$$

con $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Il valore di K stimato assicura che l'errore tra due approssimazioni successive sia inferiore alla tolleranza fissata. Poichè K deriva da una stima superiore dell'errore di troncamento, può accadere che il metodo raggiunga la precisione richiesta con un numero di iterazioni inferiore al valore K stimato usando la stima a priori.

Esercizio 3

Dato il polinomio

$$p(x) = x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 1$$

- verificare che uno degli zeri del polinomio $p(x)$ è contenuto nell'intervallo $I = [-1, 0]$
- indicando con ξ lo zero isolato al punto precedente, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere una approssimazione di ξ con almeno quattro decimali esatti usando il metodo di bisezione
- verificare che $\xi \approx -0.7191$

Esercizio 4

Si consideri la funzione

$$f(x;\lambda) = e^{-x} - 2x - \lambda$$

con $\lambda \in \mathcal{R}$

- determinare per quali valori del paramtero reale λ la funzione $f(x)$ ammette un unico zero nell'intervallo $[0,1]$

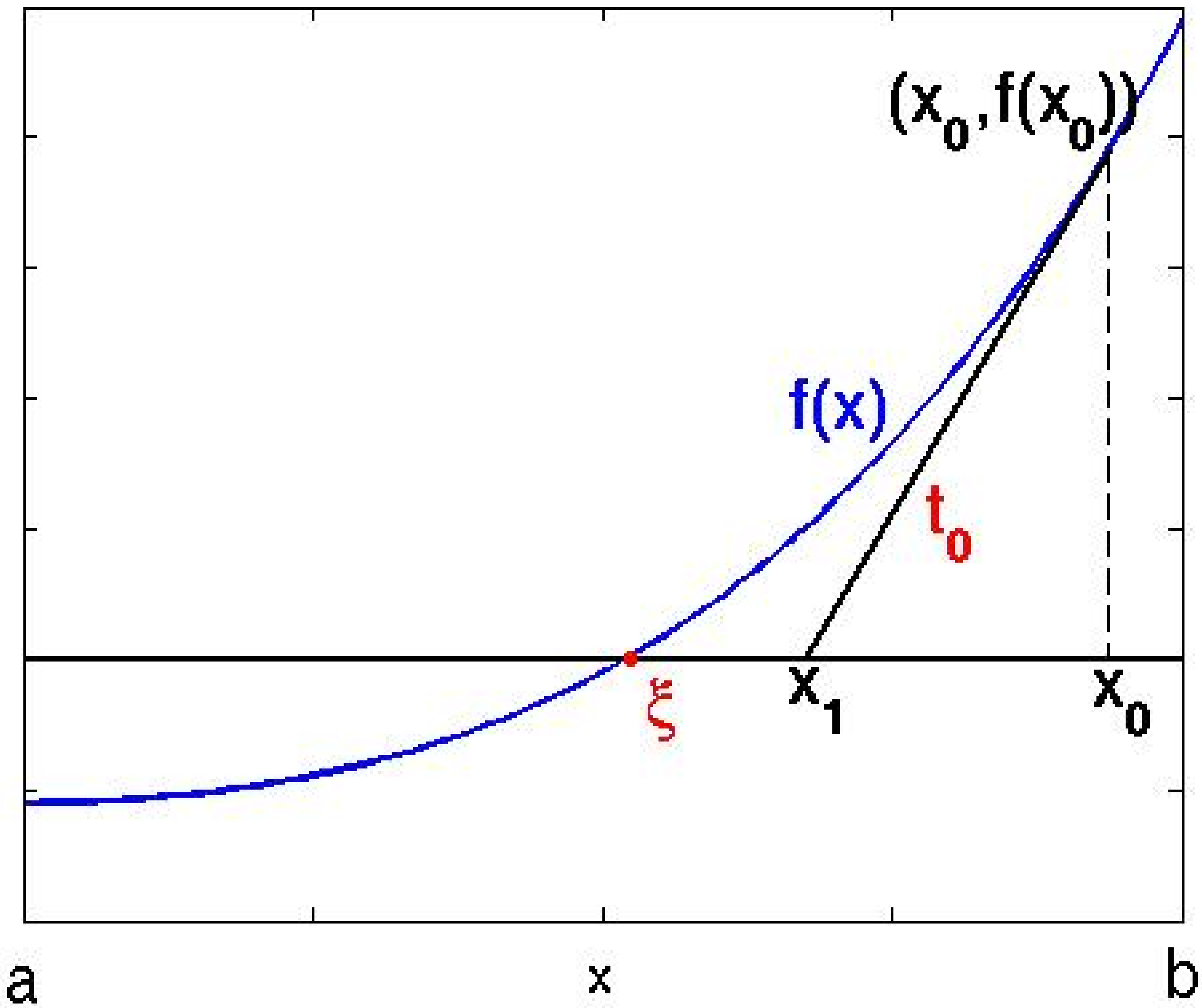
- posto $\lambda = -1$ stimare il numero di iterazioni necessarie per avere un' approssimazione dello zero ξ con almeno tre decimali esatti usando il metodo di bisezione

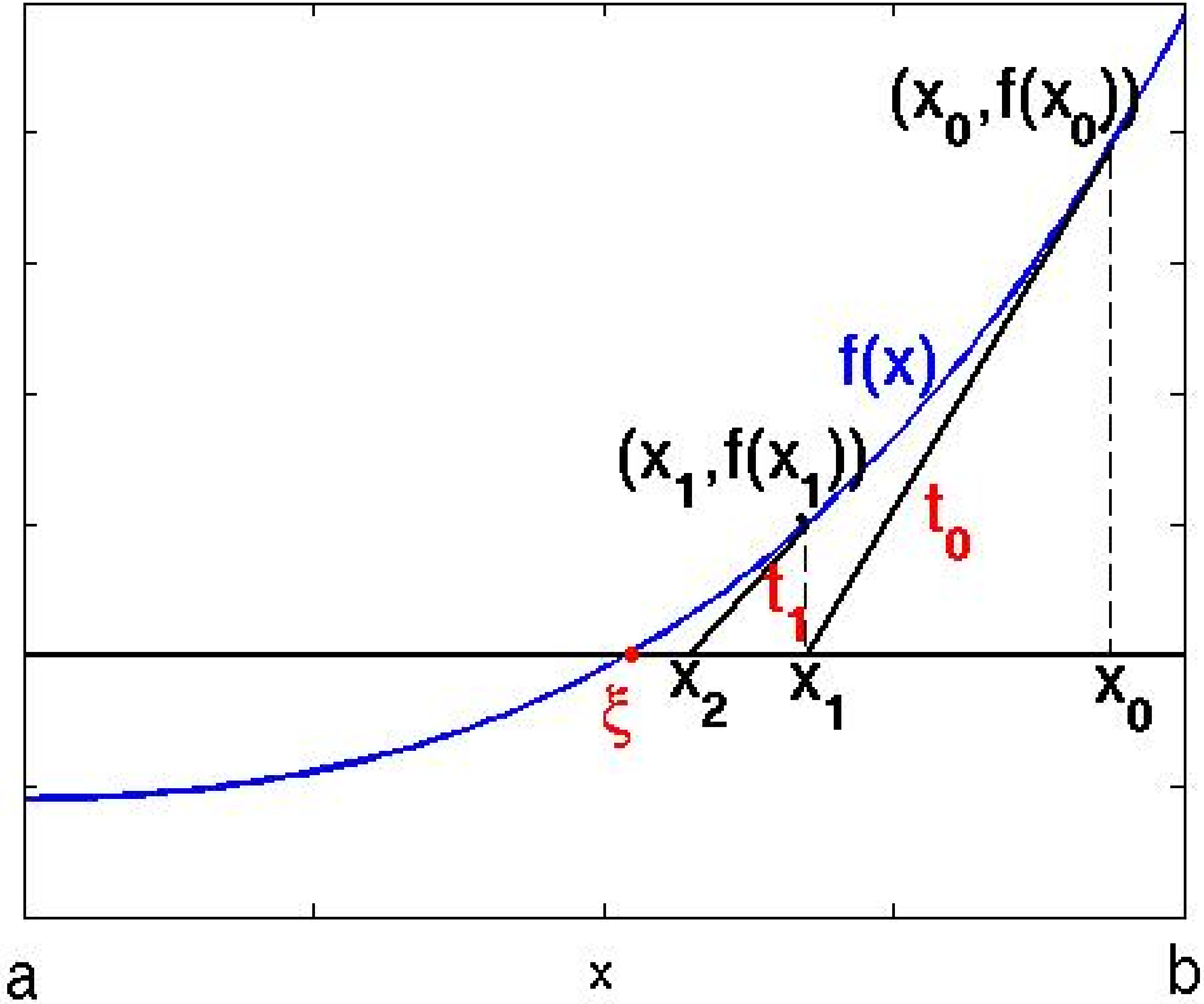
Metodi di linearizzazione

Si approssima la funzione $f(x)$ in un intorno I di ξ con la sua **tangente** o con la sua **secante**, calcolate tramite un opportuno **sviluppo in serie di Taylor**.

- **Metodo di Newton-Raphson o metodo delle tangenti**

- **Metodo delle secanti**


(x0,f(x0))
f(x)
t0
ξ
x1
x0
a
x
b



(x0,f(x0))
f(x)
(x1,f(x1))
t0
t1
ξ
x2
x1
x0
a
x
b

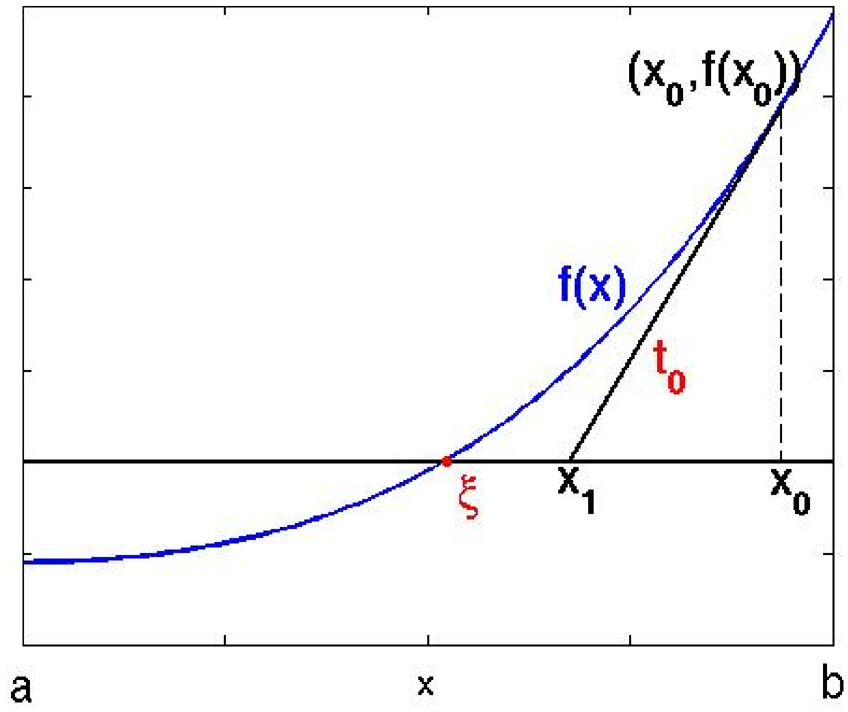
Metodo di Newton-Raphson

Approssimazione iniziale: x_0

Prima iterazione:

t_0 è la **retta tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$t_0 \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Nuova approssimazione x_1**:**

intersezione tra t_0 e $y = 0$.

$\Rightarrow$ $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

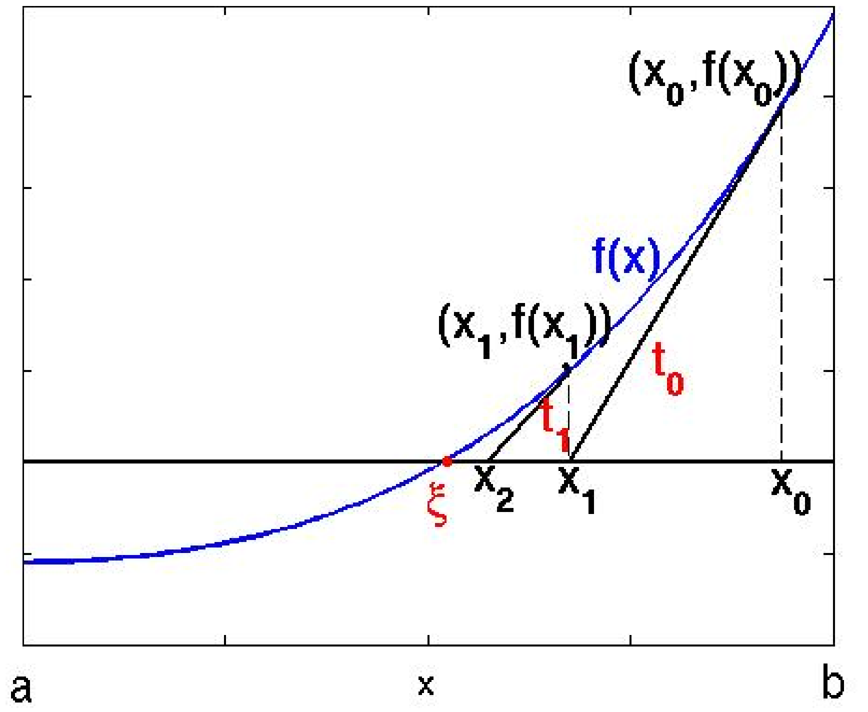
Metodo di Newton-Raphson

Nuova approssimazione: x_1

Seconda iterazione:

t_1 è la **retta tangente** a $f(x)$
nel punto $(x_1, f(x_1))$:
$t_1 \rightarrow y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

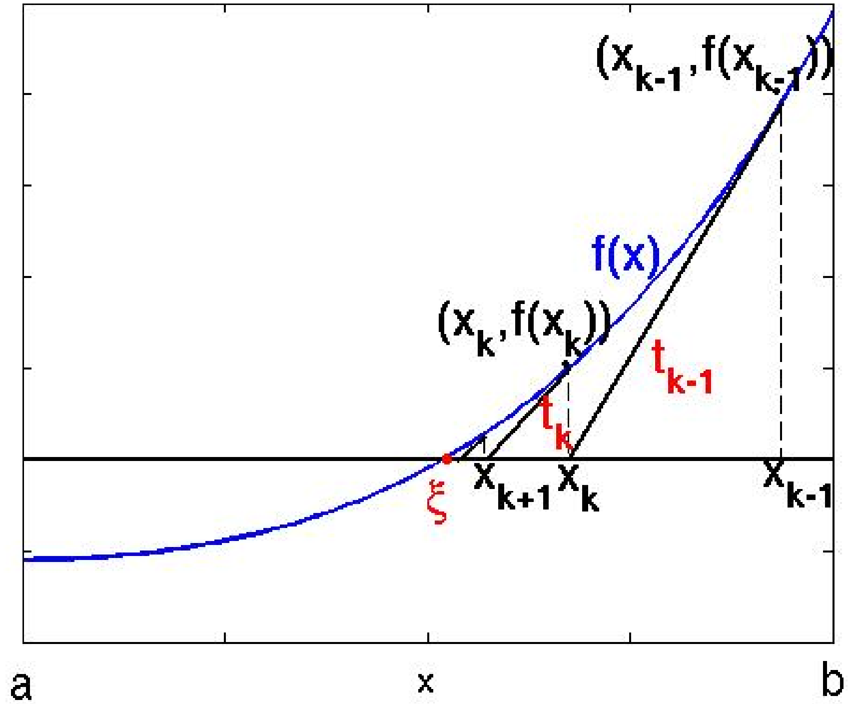
Nuova approssimazione x_2:
intersezione tra t_1 e $y = 0$.



$\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$
la **nuova approssimazione** x_k è
data dall'**intersezione** tra la **retta**
t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto
$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e la retta $y = 0$.



$$\begin{cases} t_{k-1} \rightarrow y = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\downarrow$$

Algoritmo: $$\boxed{\begin{cases} x_0 \quad \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

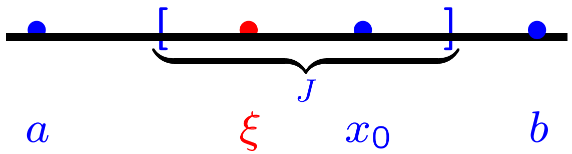
Metodo di Newton-Raphson: convergenza

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$.

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ.



OSS: il teorema garantisce solo l'**esistenza** di J

Metodo di Newton-Raphson: ordine di convergenza

Si vuole determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton-Raphson

Ordine di convergenza p: $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$

L'**errore di troncamento** alla $k+1$-esima iterazione è dato da

$$e_{k+1} = \xi - x_{k+1} = \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\right) - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) = (\xi - x_k) - \left(\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)$$

Il valore di $f(x_k)$ si può stimare considerando i primi tre termini dello **Sviluppo in serie di Taylor** attorno alla radice ξ,

$$f(x_k) = f(\xi) + f'(\xi)\underbrace{(x_k - \xi)}_{-e_k} + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_k - \xi)^2 + \ldots$$

Inoltre, supponendo che x_k sia molto vicino a ξ, si può assumere che

$$f'(x_k) \simeq f'(\xi)$$

Sostituendo i valori di $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ così ottenuti nell'espressione di e_{k+1} si ha

$$|e_{k+1}| \simeq \left| e_k - \frac{f(\xi) - f(\xi) + f'(\xi)e_k - \frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right|$$

da cui risulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right| \Rightarrow \boxed{\text{p} \geq 2}$$

e quindi se $f(x) \in C^3[a,b]$ la convergenza è almeno **quadratica**. Possiamo dire che (asintoticamente) ad ogni iterazione il numero di cifre signicative raddoppia.

Efficienza computazionale

Per valutare l'**efficienza** di un metodo iterativo bisogna tener conto sia dell'**ordine di convergenza** che del **costo computazionale**, cioè della quantità di calcoli richiesta ad ogni passo.

Efficienza computazionale: $E = p^{1/r}$

p: **ordine** di convergenza del metodo

r: numero di **valutazioni funzionali** (calcolo di funzioni o derivate) richieste ad ogni passo

Metodo di bisezione: $E = 1$
ad ogni passo si richiede una sola valutazione funzionale, $f(x_k)$, e quindi $r = 1$

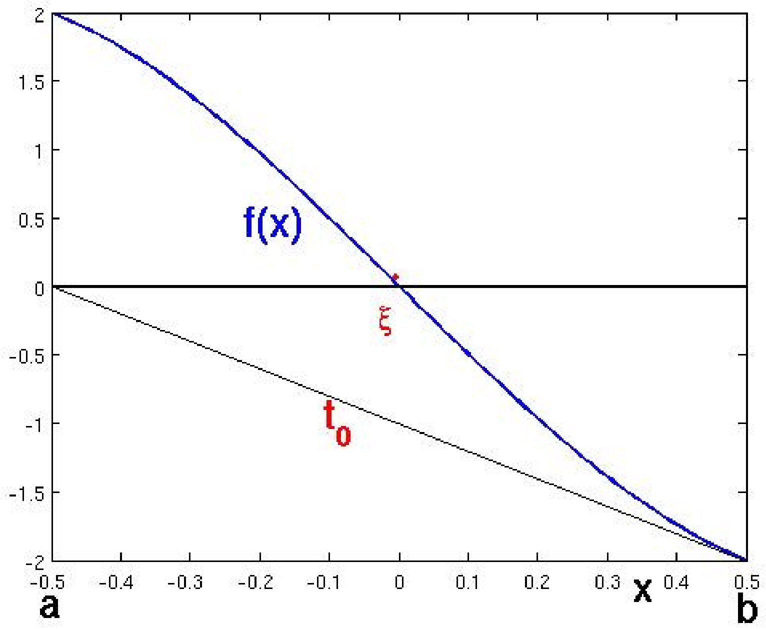
Metodo di Newton: $E = 2^{1/2}$ ad ogni passo si richiedono due valutazioni funzionali, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ e quindi $r = 2$

Metodo di Newton-Raphson: esempio

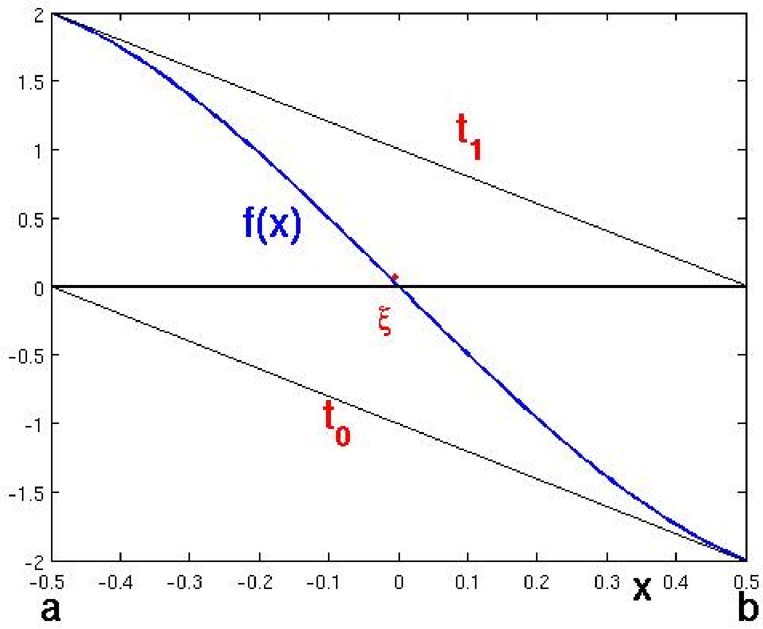
Approssimare la radice $\xi = 0$ dell'equazione

$$f(x) = 4x^3 - 5x = 0$$

con il **metodo di Newton-Raphson** nell'intervallo $I = [-0.5, 0.5]$ scegliendo come approssimazione iniziale una volta $x_0 = 0.5$ e una volta $x_0 = 0.4$.



$x_{2k} = 0.5$



$x_{2k+1} = -0.5$

Si verifica facilmente che f verifica le condizioni di applicabilità del **metodo di Newton-Raphson**.

Infatti, $f \in C^2(I), \quad f'(x) = 12x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \notin I = [-0.5, 0.5]$

Scegliendo $x_0 = 0.5$ si ha una **situazione di stallo** e il metodo non converge. Infatti, l'algoritmo di Newton per f è il seguente

$$x_k = x_{k-1} - \frac{4x_{k-1}^3 - 5x_{k-1}}{12x_{k-1}^2 - 5}$$

e quindi

$$x_1 = x_0 - \frac{4x_0^3 - 5x_0}{12x_0^2 - 5} = -0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{4x_1^3 - 5x_1}{12x_1^2 - 5} = 0.5$$

Al contrario, scegliendo $x_0 = 0.4$, il metodo converge

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{\lvert x_k - x_{k-1} \rvert}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	-0.16623376623377	0.56623376623377	0.81279423831355
2	0.00787190837207	0.17410567460584	0.03935759066802
3	-0.00000078059303	0.00787268896510	0.00000390296513
4	0.00000000000000	0.00000078059303	0.00000000000000

Il **teorema di convergenza** del metodo di Newton-Raphson assicura la convergenza per ogni scelta dell'approssimazione iniziale x_0 in un **opportuno intorno** J del punto ξ. Scegliendo come approssimazioni iniziali punti che non appartengono all'intorno J, la convergenza non può essere garantita.
Tale esempio mette in evidenza come una **scelta del punto iniziale non corretta** possa portare ad una situazione di stallo. In generale, una scelta impropria di x_0 può generare una successione x_k non convergente anche se non si verifica una situazione di stallo.

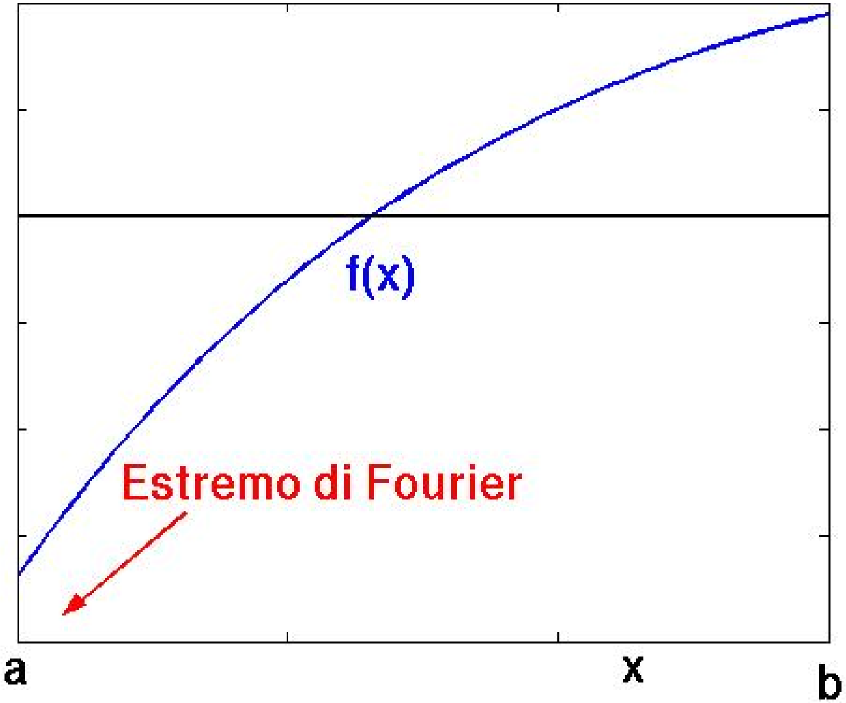
Oss: $f''(x) = 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in I$

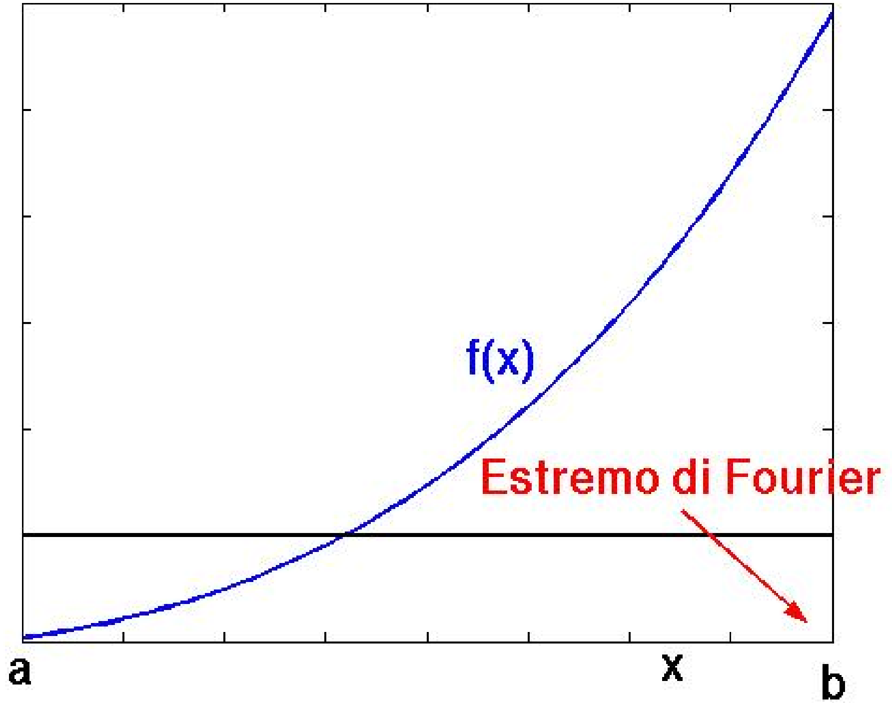
Estremo di Fourier

Se $f(x)$ ha **concavità fissa** in un intervallo I, è possibile stabilire un criterio di scelta dell'approssimazine iniziale che garantisce la **convergenza** del metodo.

Estremo di Fourier:
Data una funzione f **continua** e **convessa** in $I = [a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, si dice **estremo di Fourier** di I l'estremo verso cui f rivolge la convessità .
Se **esiste** f'', allora l'estremo di Fourier è a o b a seconda che $f(a)f''(a) > 0$ oppure $f(b)f''(b) > 0$.

Estremo di Fourier: esempi





$f''(x) < 0$ per $x \in [a,b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) > 0 \\ f(b)f''(b) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a$ è **estremo di Fourier**

$f''(x) > 0$ per $x \in [a,b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) < 0 \\ f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b$ è **estremo di Fourier**

Metodo di Newton-Raphson: convergenza

Ipotesi di applicabilità :

- $f(a)f(b) < 0$
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a,b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$;
- $f''(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$ e x_0 è l'**estremo di Fourier** di $[a,b]$.

$\Rightarrow$

1) esiste un'**unica radice** $\xi \in [a,b]$;

2) la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

è **monotona** e **converge** a ξ;

3) se $f \in C^3[a,b]$, la convergenza è **quadratica**.

OSS: tale Teorema può essere applicato anche senza procedere ad una preliminare separazione della radice ξ.

Nell'esempio precedente, relativo alla funzione $f(x) = 4x^3 - 5x$, non è soddisfatta l'ipotesi relativa alla derivata seconda, infatti $f''(x) = 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in I = [-0.5, 0.5]$.

Data la funzione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$ e l'intervallo $I = [0.6, 0.8]$

$$f'(x) = 3x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin I \vee x = \frac{20}{3} \notin I$$

$$f''(x) = 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \notin I$$

Le ipotesi del teorema sono verificate e, poichè

$$f''(0.6) = \frac{18}{5} - 20 < 0 \quad f''(0.8) = \frac{24}{5} - 20 < 0$$

e

$$f(0.6) > 0 \quad f(0.8) < 0$$

l'estremo di Fourier è l'estremo $b = 0.8$, che quindi può essere scelto come **approssimazione iniziale** del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.8$.

Esercizio: eseguire le iterazioni e verificare la convergenza monotona

Problema 3: soluzione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0 \qquad \lambda \in I = [0.05, 0.15]$$

- Nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**
- f, f', f'' sono **continue** in I;
- $f'(x) = e^{\lambda} - \frac{0.435}{\lambda^2}(e^{\lambda} - 1) + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} \neq 0$ per $x \in I$;

$\Rightarrow$ Lo zero può essere approssimato con il **metodo delle tangenti**

Inoltre $\quad f''(x) = e^{\lambda} + \frac{0.87}{\lambda^3}(e^{\lambda} - 1) - \frac{0.87}{\lambda^2}e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} > 0$ in I

$\Rightarrow$ esiste l'**estremo di Fourier** di I:

$$f(0.15)f''(0.15) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0.15$$

Iterazioni

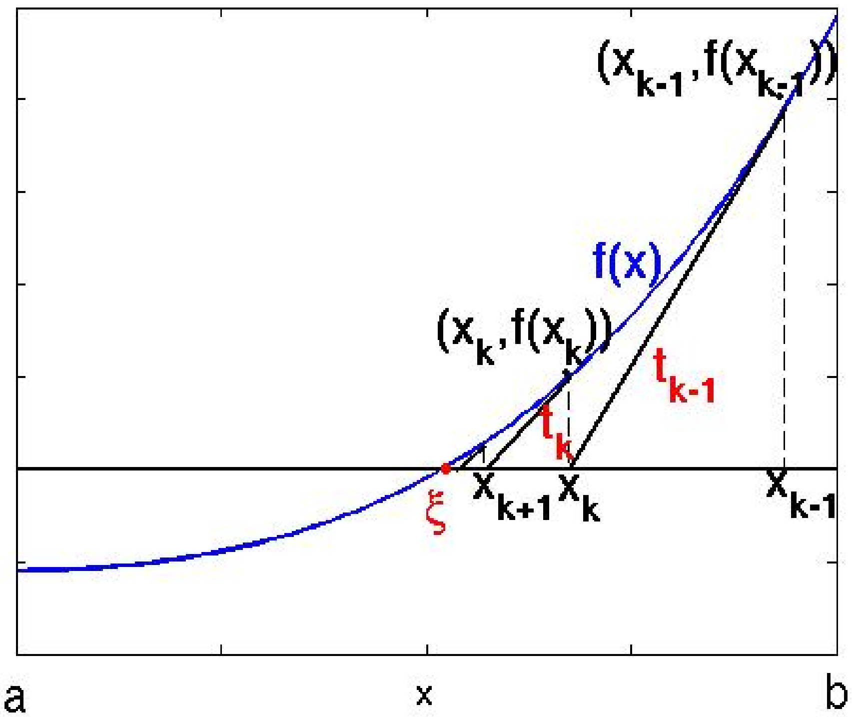
k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	$\|f(x_k)\|$
0	0.15000000000000	10.00000000000000	0.06715354664030
1	0.10211384134812	0.04788615865188	0.00149497988981
2	0.10099851665312	0.00111532469500	0.00000078594305
3	0.10099792968591	0.00000058696721	0.00000000000022
4	0.10099792968575	0.00000000000016	0.00000000000000
5	0.10099792968575	0.00000000000000	0.00000000000000

OSS: Con il metodo di bisezione servivano 11 iterazioni per ottenere una soluzione con 4 cifre significative.

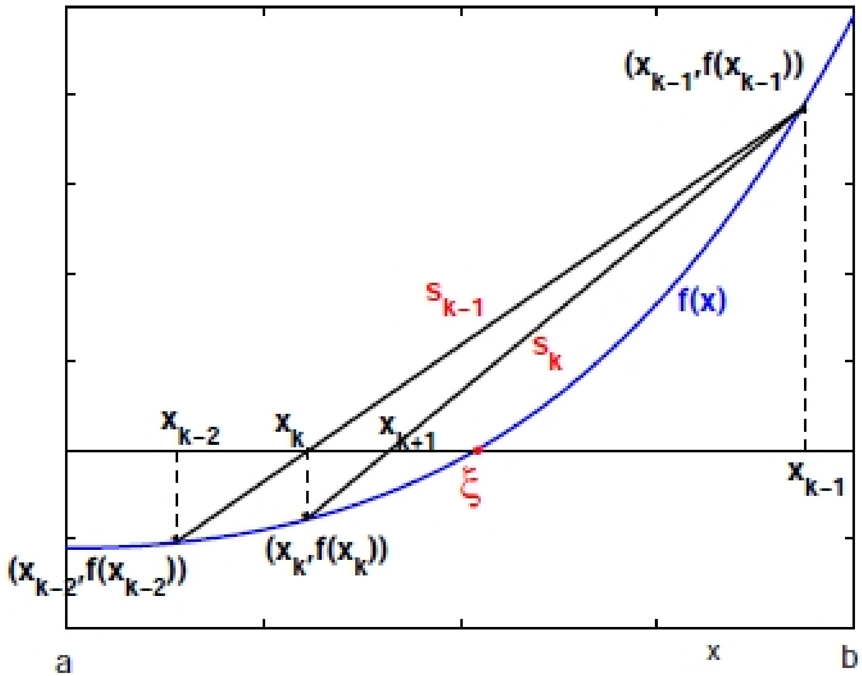
Cosa succede se si sceglie come **approssimazione iniziale** $x_0 = 0.05$?

Metodi di linearizzazione

Metodo di Newton-Raphson (o delle tangenti)



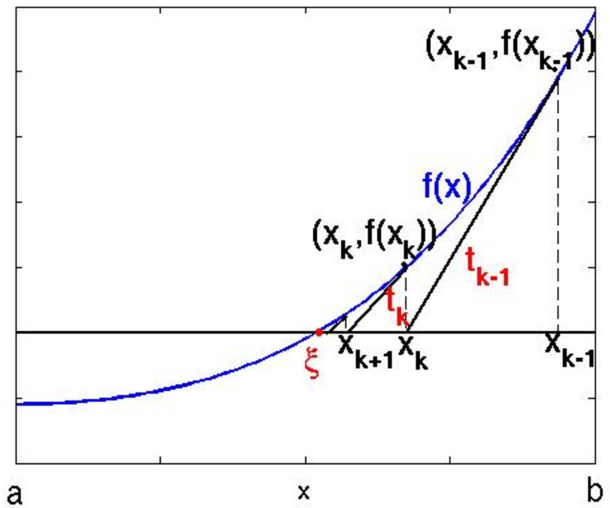
Metodo delle secanti



Il metodo di Newton-Raphson richiede la conoscenza della $f'(x)$ che non sempre è di facile valutazione. Un metodo alternativo è il **metodo delle secanti** con estremi variabili in cui $f'(x_n)$ è approssimato con il **rapporto incrementale**.

Metodi di linearizzione

Metodo di Newton-Raphson (o delle tangenti)

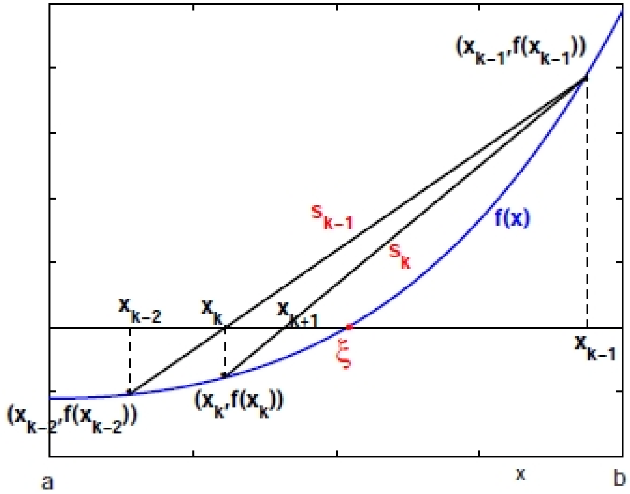


Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Metodo delle secanti con estremi variabili



Ad ogni **iterazione** $k = 2, 3, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** s_{k-1}, **secante** $f(x)$ nei punti $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0, x_1 & \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, & k = 2, \ldots \end{cases}$$

Metodo delle secanti

$$\boxed{\begin{cases} x_0, x_1 & \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, & k = 2, \ldots \end{cases}}$$

Vantaggi:

- si può usare quando **non si conosce** la derivata di $f(x)$ o quando $f(x)$ è **nota per punti**
- ad ogni passo richiede **una sola** valutazione funzionale

Svantaggi:

- servono **due approssimazioni iniziali** x_0 e x_1
- la scelta di x_0 e x_1 deve essere "**accurata**"

Convergenza del metodo delle secanti

Se • è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ **simmetrico** intorno alla **radice** ξ,

• f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$,

• $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$,

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0, x_1 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ con convergenza **superlineare**, cioè $2 > p > 1$.

Se $f''(x) \neq 0$ in I, l'**ordine di convergenza** è

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow E = p \simeq 1.62$$

Problema 3

Applicare il **metodo delle secanti** per risolvere il problema 3

Esempio: $x_0 = 0.05$ $\qquad x_1 = 0.15$

k	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\|x_{k+1} - x_k\|$	$\|f(x_{k+1})\|$
1	0.05000000000000	0.15000000000000	0.09981947116877	0.05018052883123	0.00157706647874
2	0.15000000000000	0.09981947116877	0.10097089447657	0.00115142330781	0.00003619938533
3	0.09981947116877	0.10097089447657	0.10099794471093	0.00002705023436	0.00000002011856
4	0.10097089447657	0.10099794471093	0.10099792968556	0.00000001502538	0.00000000000026

Esercizio 5

Data l'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 + \alpha - \cos x = 0$$

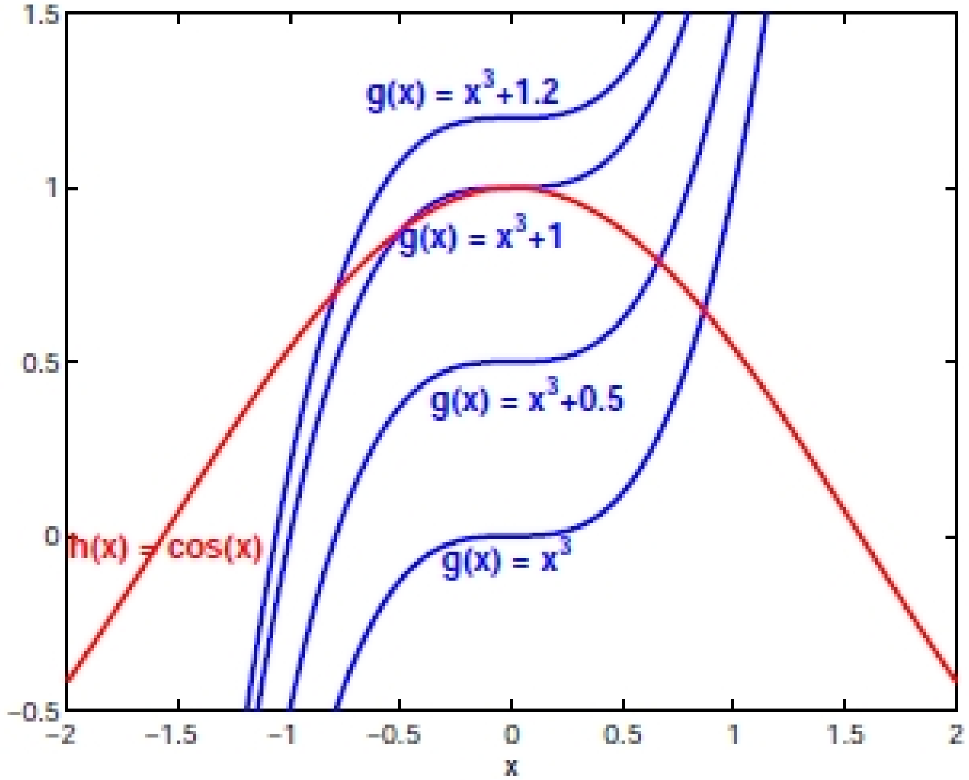
1) individuare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione non ammette radici positive
2) per $\alpha = 1/3$ separare la radice più piccola $\tilde{\xi}$
3) fornire una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare $\tilde{\xi}$ con un errore inferiore a $\varepsilon = 10^{-6}$ tramite il **metodo di bisezioni**;
4) quante iterazioni sono necessarie per approssimare con la stessa tolleranza ε la radice $\tilde{\xi}$ con i **metodi di Newton e delle secanti**?

Traccia della soluzione

1) Tracciando **qualitativamente** i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = x^3 + \alpha \qquad y = h(x) = \cos x$$

si deduce che se $\alpha \geq 1$ la funzione $f(x)$ **non** ha radici positive.

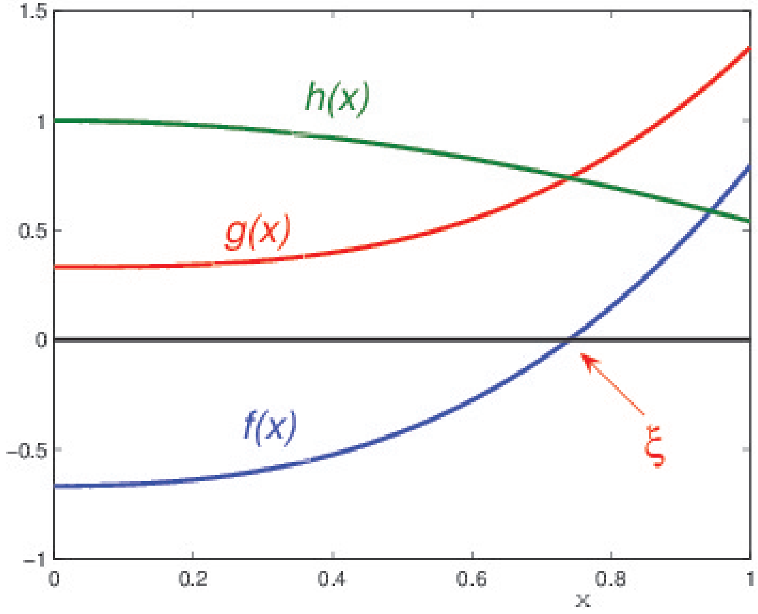


2) Grafici

$f(x) = x^3 + 1/3 - \cos x$

$g(x) = x^3 + 1/3$

$h(x) = \cos(x)$



La radice è l'**intersezione** tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle x (e coincide, ovviamente, con l'**intersezione** tra i grafici di $g(x)$ e $h(x)$).

L'intervallo $[0, 1]$ contiene l'**unica** radice dell'equazione

$$f(x) = x^3 + 1/3 - \cos x = 0$$

Infatti $f(0)f(1) < 0$ e inoltre

$f'(x) = 3x^2 + \sin(x) > 0$ per $x \in (0, 1]$

3) Nell'intervallo $[0,1]$ sono verificate le **ipotesi di applicabilità** del metodo di bisezioni.

Quindi il numero di iterazioni K per cui $|e_K| \leq \varepsilon$ si ricava dalla relazione

$$|e_K| = |\xi - x_K| \leq \frac{b-a}{2^K} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad K > \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2}$$

.

In questo caso $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$

$$\Rightarrow K > \frac{log(1) - log(10^{-6})}{log 2} \approx 19.932 \Rightarrow K \geq 20$$

.

4) Si possono verificare analiticamente le **ipotesi di applicabilità** dei metodi delle tangenti e delle secanti nell'intervallo $I = [0, 1]$:

- Nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**

- f, f', f'' sono **continue** in I

- $f'(x) = 3x^2 + \sin(x) > 0$ per $x \in J \subset I, \quad J = [\delta, I]$ con $0 < \delta << 1$

- $f''(x) = 6x + \cos(x) > 0$ per $x \in I$

$\Rightarrow$ l'estremo $b = 1$ è l'**estremo di Fourier** dell'intervallo.

Il numero di iterazioni si può calcolare eseguendo le iterate.

Risolvere l'esercizio con i metodi implementati in Matlab.

k	x_k (**bisez.**)	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k (**Newton**)	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k (**secanti**)	$\|x_k - x_{k-1}\|$
1	0.500000000		1.		0., 1.	
2	0.750000000	0.25e+0	0.793560583	0.21e+0	0.456715571	0.54e+0
3	0.625000000	0.12e+0	0.742925006	0.51e-1	0.658587384	0.20e+0
4	0.687500000	0.62e-1	0.739971453	0.29e-2	0.775393863	0.12e+0
5	0.718750000	0.31e-1	0.739961685	0.98e-5	0.736625691	0.39e-1
6	0.734375000	0.16e-1	0.739961685	0.11e-9	0.739832822	0.32e-2
7	0.742187500	0.78e-2			0.739962167	0.13e-3
8	0.738281250	0.39e-2			0.739961685	0.48e-6
9	0.740234375	0.19e-2				
10	0.739257812	0.97e-3				
11	0.739746097	0.49e-3				
12	0.739990234	0.24e-3				
13	0.739868164	0.12e-3				
14	0.739929199	0.61e-4				
15	0.739959717	0.30e-4				
16	0.739974976	0.15e-4				
17	0.739967346	0.76e-5				
18	0.739963531	0.38e-5				
19	0.739961624	0.19e-5				
20	0.739962578	0.95e-6				

Tempo di calcolo

Bisezione: $\simeq$ 13 ms, **Newton**: $\simeq$ 3.83 ms, **Secanti**: $\simeq$ 4.78ms

Esercizio 1

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una stima del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

Esercizio 1: Metodo di Newton-Raphson

$$f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

Si osserva che

- $f'(L) = 1 + \frac{a_g T^2 d}{L^2} \frac{1}{cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} \neq 0 \quad \forall L \neq 0.$

  Inoltre f' è una funzione continua nello stesso dominio ed in particolare nell'intervallo I in cui è stata isolata la radice positiva di f.

- $f''(L) = a_g T^2 d \left(-\frac{2}{L^3 cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} + \frac{2\pi d}{L^4} \frac{sinh(\frac{4\pi d}{L})}{cosh^4(\frac{2\pi d}{L})} \right)$

  è una funzione continua nel dominio di esistenza di f.

  Inoltre è strettamente negativa nell'intervallo I.

Scegliamo $x_0 = b = 0.6 \cdot 10^6$ come approssimazione iniziale della soluzione. Calcoliamo ora il punto x_1 tale che

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

cioè

$$x_1 = 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568}{1.90250514141390} = 569585.74319106806.$$

L'errore $e_1 = |x_1 - x_0| = 30414.25681 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Calcoliamo ora il punto x_2 tale che

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

cioè

$$x_2 = 569585.74319106806 - \frac{-1462.944269931060}{2.00126829645764 6} = 570316.7517582455.$$

L'errore $e_2 = |x_2 - x_1| = 731.008567177457730 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

L'approssimazione ottenuta non ha ancora la precisione richiesta, quindi calcoliamo il punto x_3 tale che

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

cioè

$$x_3 = 570316.7517582455 - \frac{-0.93634280480910}{1.99870815060183} = 570317.220232469.$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 0.468474001390859 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

cioè

$$x_4 = 570317.2202322469 - \frac{-3.834720700979233 \cdot 10^{-7}}{1.998706513054914} =$$

$$= 570317.22023243876000.$$

L'errore $e_4 = |x_4 - x_3| = 1.918601193287788 \cdot 10^{-7} < 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Riassumendo

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	569585.74319106806	30414.256808931939	1462.9442699310603
2	570316.75175824552	731.0085671774577	0.936342804809101
3	570317.22023224691	0.4684740013908590	0.000000383472070
4	570317.22023243876	0.0000001918524500	0.000000000000000

Dopo 4 iterazioni è stata raggiunta la precisione ε richiesta per l'errore!

Dopo 3 iterazioni il valore di f nell'approssimazione alla terza iterazione è molto più piccolo di ε!

Poichè

$$f''(a) < 0 \text{ e } f''(b) < 0 \text{ mentre } f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0,$$

a è l'estremo di Fourier dell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, 0.6 \cdot 10^6]$

e quindi può essere scelto come approssimazione iniziale della soluzione, cioè $x_0 = a = 0.5 \cdot 10^6$:

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	565429.608054025100000	65429.608054025099000	9811.013667401624800
2	570296.151698269420000	4866.543644244317000	42.110592287266627
3	570317.219844276430000	21.068146007019095	0.000775822554715
4	570317.220232438760000	0.000388162326999	0.000000000000000
5	570317.220232438760000	0.000000000000000	0.000000000000000

Esercizio 1: Metodo delle secanti

La continuità di f, f' e f'' e $f'(L) \neq 0 \quad \forall\, L \in I$, assicura la convergenza del motodo delle secanti.

Si scelgono gli estremi dell'intervallo I come punti iniziali, cioè

$$x_1 = a = 0.5 \cdot 10^6 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 0.6 \cdot 10^6,$$

e si calcola il punto

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} =$$

$$= 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568 \cdot 0.1 \cdot 10^6}{57863.27995127568 + 150396.8359693979} =$$

$$= 572215.86106611218$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 27784.138933887822 > \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$

Calcoliamo il punto

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} =$$

$$= 572215.86106611218 - \frac{3788.546320179361 \cdot (-27784.138933887822)}{3788.546320179361 - 57863.27995127568} =$$

$$= 570269.26807805535$$

Continuando si ottiene la seguente tabella

$\mathbf{k}$	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	572215.86106611218	27784.13893388782200	3788.5463201793609
2	570269.26807805535	1946.592988056829200	95.84630239580 2923
3	570317.29971602384	48.031637968495488	0.1588643480 79078
4	570317.22023577173	0.079480252112262	0.000006661517546
5	570317.22023243876	0.000003332970664	0.000000000000000

Il metodo converge dopo 5 iterazioni

(**OSS**: la $f(x_5)$ è zero rispetto alla precisione di macchina.)

Separazione delle radici

La separazione delle radici di $f(L)$ può essere fatta anche in modo analitico. Infatti, basta osservare che

$$\lim_{L \to 0} f(L) = -\frac{a_g T^2}{2\pi},$$

in quanto $\tanh(\frac{2\pi d}{L}) \to 1$, mentre

$$\lim_{L \to +\infty} f(L) = +\infty$$

in quanto $\tanh(\frac{2\pi d}{L}) \to 0$.

Inoltre, la derivata prima di f è strettamente positiva per $L > 0$ da cui si deduce che f è una funzione monotona crescente per $L > 0$.

Scegliendo $L = 2\pi d$, si ha

$$f(2\pi d) = 2\pi d - \frac{a_g T^2}{2\pi} \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} < 0,$$

mentre, considerando che $\tanh(x) \approx x$, si ha $L = \sqrt{a_g d} T$ e

$$f(\lceil \sqrt{a_g d} T \rceil) = 369.26 > 0.$$

Quindi, l'intervallo

$$I = [\lceil 2\pi d \rceil, \ \lceil \sqrt{a_g d} T \rceil] = [25133, 570502]$$

isola la radice positiva di f.

Esercizio 1

Confrontare le approssimazioni della radice positiva di f nell'intervallo $I = [25133, 570502]$, usando il metodo di bisezione, di Newton-Raphson e delle secanti, con i risultati delle tabelle precedenti.

Metodo di Bisezione

$$I = [25133,\ 570502]$$

Si osserva facilmente che il metodo converge alla soluzione con la precisione richiesta dopo 36 iterazioni

k	estremo inf.	estremo sup.	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	297817.500000000	570502.00000000000	434159.7500000000	136342.25	314664.12181
2	434159.750000000	570502.00000000000	502330.8750000000	68171.125	145053.08450
3	502330.875000000	570502.00000000000	536416.4375000000	34085.5625	69892.91937
4	536416.437500000	570502.00000000000	553459.2187500000	17042.78125	34205.98083
5	553459.218750000	570502.00000000000	561980.6093750000	8521.39062	16785.70212
6	561980.609375000	570502.00000000000	566241.3046875000	4260.69531	8175.80282
7	566241.304687500	570502.00000000000	568371.6523437500	2130.34766	3895.25742
8	568371.652343750	570502.00000000000	569436.8261718750	1065.17383	1761.00610
9	569436.826171875	570502.00000000000	569969.4130859375	532.58691	695.37596

10	569969.41308593750	570502.00000000000	570235.70654296875	266.29346	162.93356
11	570235.70654296875	570502.00000000000	570368.85327148438	133.14673	103.19463
12	570235.70654296875	570368.85327148438	570302.27990722656	66.57336	29.86171
13	570302.27990722656	570368.85327148438	570335.56658935547	33.28668	36.66839
14	570302.27990722656	570335.56658935547	570318.92324829102	16.64334	3.40382
15	570302.27990722656	570318.92324829102	570310.60157775879	8.32167	13.22882
16	570310.60157775879	570318.92324829102	570314.76241302490	4.16083	4.91247
17	570314.76241302490	570318.92324829102	570316.84283065796	2.08042	0.75431
18	570316.84283065796	570318.92324829102	570317.88303947449	1.04021	1.32476
19	570316.84283065796	570317.88303947449	570317.36293506622	0.52010	0.28522
20	570316.84283065796	570317.36293506622	570317.10288286209	0.26005	0.23455
21	570317.10288286209	570317.36293506622	570317.23290896416	0.13003	0.02534
22	570317.10288286209	570317.23290896416	570317.16789591312	0.06501	0.10460
23	570317.16789591312	570317.23290896416	570317.20040243864	0.03251	0.03963
24	570317.20040243864	570317.23290896416	570317.21665570140	0.01625	0.00715
25	570317.21665570140	570317.23290896416	570317.22478233278	0.00813	0.00909
26	570317.21665570140	570317.22478233278	570317.22071901709	0.00406	0.00097
27	570317.21665570140	570317.22071901709	570317.21868735924	0.00203	0.00309
28	570317.21868735924	570317.22071901709	570317.21970318817	0.00102	0.00106
29	570317.21970318817	570317.22071901709	570317.22021110263	0.00051	0.00004
30	570317.22021110263	570317.22071901709	570317.22046505986	0.00025	0.00046
31	570317.22021110263	570317.22046505986	570317.22033808124	0.00013	0.00021
32	570317.22021110263	570317.22033808124	570317.22027459193	0.00006	0.00008
33	570317.22021110263	570317.22027459193	570317.22024284722	0.00003	0.00002
34	570317.22021110263	570317.22024284722	**570317.22022**697493	0.00002	0.00001
35	570317.22022697493	570317.22024284722	**570317.22023**491107	0.00001	$0.5 \cdot 10^{-5}$
36	570317.22022697493	570317.22023491107	**570317.22023**094306	$0.4 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$

Metodo di Newton-Raphson

$$I = [25133,\ 570502]$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	570317.19038567902	184.80961432098411O	0.05965491465758 5
2	570317.22023243795	0.029846758930944	0.000000001629815
3	570317.22023243876	0.000000000814907	0.000000000000000

Metodo delle secanti

$$I = [25133,\ 570502]$$

k	$\mathrm{x_k}$	$\mathrm{e_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert}$	$\mathrm{f(x_k)}$
1	570481.52988393593	20.470116064068861	328.35959916887805
2	570317.19369166286	164.33619227306917	0.053047222900204
3	570317.22023625160	0.026544588734396	0.000007620779797
4	570317.22023243876	0.000003812834620	0.000000000000000

Esercizio 6

Esercizio **1.6** L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Esercizi di Calcolo Numerico, II ed.

Data l'equazione dipendente da un **parametro positivo** α

$$f(x,\alpha) = \alpha e^x \sqrt{x} - 1 = 0$$

determinare i valori di α per i quali f ha una radice in $I = [0.01, 1]$; detto A l'insieme di tali valori, si consideri $\alpha \in A$ e si discuta con quali modalità va applicato il metodo di Newton-Raphson per approssimare detta radice.

Il dominio di esistenza di f è $x \geq 0, \quad \forall \alpha$. Inoltre si ha

$$f(0) = -1, \quad lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \alpha \left(e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \right) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) > 0, \quad \forall x > 0$$

Quindi, f è una funzione **monotona crescente** che agli estremi dell'intervallo $I = [0.01, 1]$ assume i valori

$$f(0.01) = \alpha \frac{e^{0.01}}{10} - 1 \quad e \quad f(1) = \alpha e - 1$$

Poichè f è monotona crescente, affincè si abbia un'**unica radice** in I si dovrà avere

$$f(0.01) < 0 \quad e \quad f(1) > 0$$

$$\alpha\frac{e^{0.01}}{10} - 1 < 0 \quad e \quad \alpha e - 1 > 0$$

da cui si ricava l'insieme dei valori di A

$$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{10}{e^{0.01}}$$

Per poter applicare il **metodo di Newton-Raphson**, e per essere certi che il metodo converga alla radice cercata, è necessario che f, f', f'' siano funzioni continue in I e che $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$

f, f' sono funzioni continue in I, inoltre abbiamo già verificato che f è una funzione monotona crescente, per cui $f'(x) \neq 0$ in I.

Per quanto riguarda la **derivata seconda** si ha

$$f''(x) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) + \alpha e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right) = \frac{\alpha e^x}{2\sqrt{x}} \frac{4x^2+4x-1}{2x}$$

che risulta continua in I ma

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{2}}{2}$$

Poichè la soluzione positiva, $x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ appartiene all'intervallo I, la **convergenza** del metodo **non è garantita per qualsiasi scelta del punto iniziale** x_0.

La presenza del punto di flesso fa si che per alcune scelte del punto iniziale si possano generare successioni di iterate che non convergono o che vanno in condizioni di stallo.

Ad esempio può accadere che nella **successione delle approssimazioni** prodotte siano compresi **punti che non appartengono all'intervallo** I.

$$f(x,\alpha) = \alpha e^x \sqrt{x} - 1 = 0$$

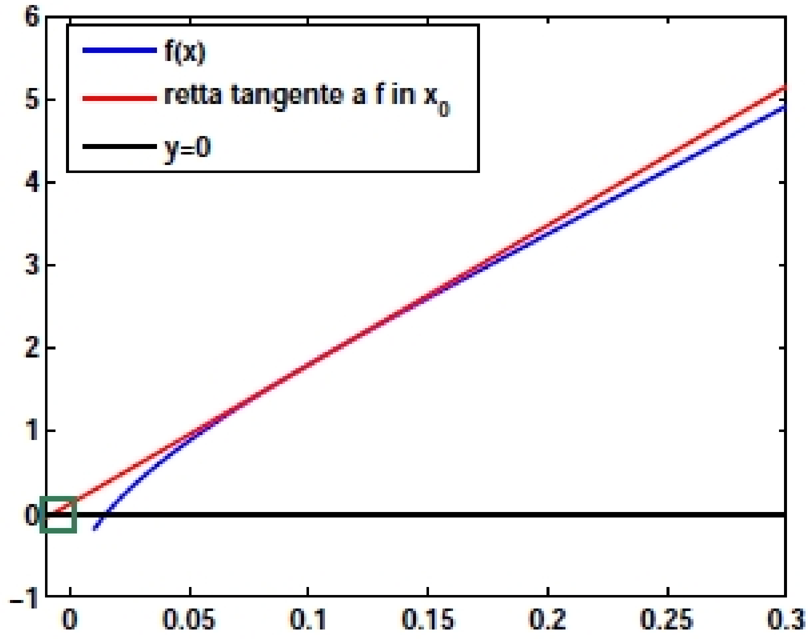
Ad esempio, scegliendo $x_0 = 0.38$ e $\alpha = 8$ si ha

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.38 - \frac{f(0.38)}{f'(0.38)} = 0.0080626$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k = \|x_k - x_{k-1}\|}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	0.008062568849982	0.371937431150018	0.275850501413549

La tangente alla funzione f nel punto x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $x_1 = 0.008062568849982 \notin I = [0.01, 1]$

Inoltre, per alcune scelte di α e x_0, come per esempio $\alpha = 8$ e $x_0 = 0.1$, il punto di intersezione può non appartenere al dominio di esistenza della funzione stessa; infatti otteniamo $x_1 = -0.007 < 0$



In questi casi è necessario **cambiare** la scelta del **punto iniziale**. Per esempio, si può calcolare l'approssimazione prodotta dal metodo di bisezione dopo poche iterazioni (o quando si raggiunge una certa precisione) e usarla come punto iniziale per il metodo di Newton.

Per esempio, dopo quattro iterazioni del **metodo di bisezione** ($\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-1}$)

k	$\mathbf{a_k}$	$\mathbf{b_k}$	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	0.01	0.505000	0.2575000	0.2475000	4.251815163314802
2	0.01	0.257500	0.1337500	0.1237500	2.344442774424002
3	0.01	0.133750	0.0718750	0.0618750	1.304590841882905
4	0.01	0.071875	**0.0409375**	0.0309375	0.686279560806184

si ottiene $x_4 = 0.0409375$ che, usato come punto iniziale nel **metodo di Newton** produce

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	0.010137854601102	0.030799645398898	0.186297162576147
2	0.014687723854149	0.004549869253046	0.016111161677858
3	0.015155019259722	0.000467295405573	0.000115181238480
4	0.015158408093962	0.000003388834240	0.000000005864268
5	0.015158408266516	0.000000000172555	0.000000000000000
6	0.015158408266517	0.000000000000000	0.000000000000000

Al contrario, per altre scelte sia di α che del punto iniziale x_0, come per esempio $x_0 = 0.5$ e $\alpha = 1$, il metodo converge alla soluzione in poche iterazioni

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	0.428881942480353	0.071118057519647	0.005610829411438
2	0.426305773395493	0.002576169084861	0.000006567282834
3	0.426302751011004	0.000003022384489	0.000000000008998
4	0.426302751006863	0.000000000004141	0.000000000000000
5	0.426302751006863	0.000000000000000	0.000000000000000

Osserviamo infine che scegliendo α in modo che la radice di f coincida con il punto di flesso $\xi = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, avremo

$$\alpha e^{\xi}\sqrt{\xi} - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{e^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}}$$

La radice di f è il suo punto di **flesso** (la derivata seconda si annulla in questo punto) e l'**ordine di convergenza** del metodo di Newton aumenta essendo almeno 3.

Punto unito di una trasformazione

Un **punto unito di una trasformazione** è una soluzione dell'equazione non lineare

$$x = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) - x = 0$$

Se ξ è **punto unito** di φ, allora

$$\xi = \varphi(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\xi) - \xi = 0$$

Trovare il **punto unito** di φ significa trovare l'**ascissa** del punto di **intersezione** tra la retta $y = x$ e la curva $y = \varphi(x)$.

Punto unito: Esempio 1

Trovare i **punti uniti** della **funzione**

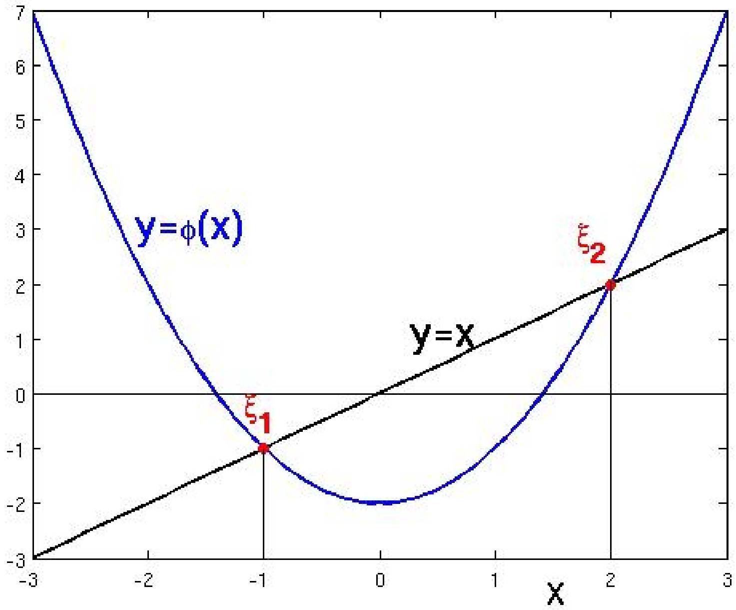
$$\varphi(x) = x^2 - 2 \qquad \text{per} \qquad -2 \leq x \leq 3.$$

Si tratta di trovare i valori di x per i quali

$$\varphi(x) = x \qquad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

Ci sono **due** punti uniti:

$$\xi_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$
$$\xi_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(2) = (2)^2 - 2 = 2$$



che corrispondono ai punti di intersezione tra le retta $y = x$ e la funzione φ

Metodo delle approssimazioni successive

Per **approssimare** un punto unito si può utilizzare il **metodo delle approssimazioni successive**:

$$\begin{cases} x_0 & \text{approssimazione iniziale} \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La funzione φ è detta **funzione di iterazione**.

Convergenza

Il metodo è **convergente** se per la **successione delle approssimazioni** $\{x_k = \varphi(x_{k-1})\}_{k\geq 1}$ vale

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} |\xi - x_k| = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = \xi}$$

Criterio di arresto

Se il metodo è convergente, una **buona approssimazione** di ξ è data dal valore x_K per il quale

$$\boxed{|x_K - x_{K-1}| \leq \varepsilon}$$

Convergenza: condizione necessaria

Teorema. Se la successione

$$\begin{cases} x_0 & \text{approssimazione iniziale} \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

è **convergente** a un valore τ e φ è **continua** in τ $\Rightarrow$ τ è **punto unito** di φ, cioè $\tau = \varphi(\tau)$.

Dimostrazione.

$$\tau = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{k-1}) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}\right) = \varphi(\tau)$$

Metodo del punto unito

Il **metodo delle approssimazioni successive** può essere utilizzato per approssimare le **radici** di un'equazione non lineare.

Il **metodo del punto unito** consiste nel riscrivere l'equazione non lineare di partenza in un problema equivalente di punto unito:

$$f(x) = 0 \qquad \overset{f(x)=\varphi(x)-x}{\Longleftrightarrow} \qquad x = \varphi(x)$$

Se ξ è **radice** di f allora è **punto unito** di φ:

$$f(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \varphi(\xi)$$

Metodo del punto unito: Esempio 1

Trovare le **radici** dell'**equazione non lineare** $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

Possiamo trasformare l'equazione non lineare in un **problema equivalente di punto unito**:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x^2 - 2$$

Trovare gli **zeri** di f equivale a trovare i **punti uniti** della **funzione di iterazione**

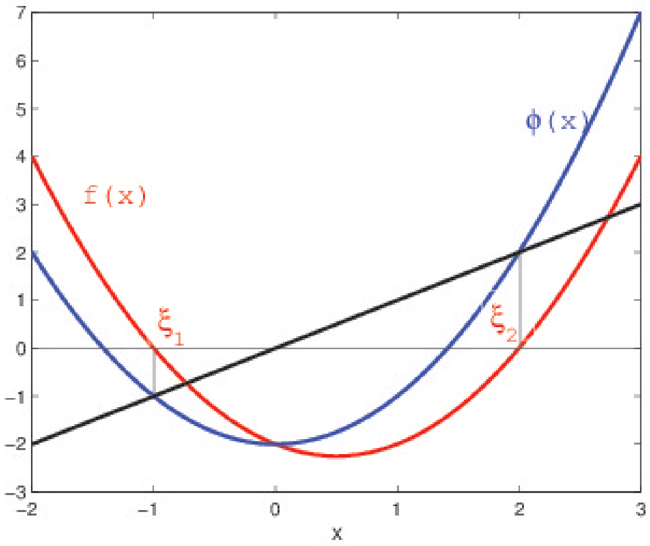
$$\varphi(x) = x^2 - 2$$

Ci sono **due** punti uniti:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \\ \xi_2 &= 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(2) = (2)^2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

ξ_1 e ξ_2 sono anche gli zeri di f:

$$f(\xi_1) = 0 \quad f(\xi_2) = 0$$



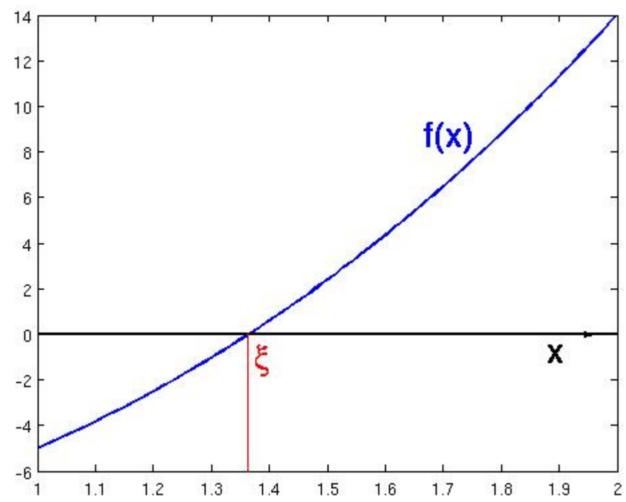
Metodo del punto unito: Esercizio

Verificare che l'equazione $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ha un'**unica** radice in $I = [1, 2]$ e trovare un'opportuna **funzione di iterazione** per approssimarla.

Soluzione. $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ per $x \in I$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è **monotona crescente** e $\begin{cases} f(1) = -5 < 0 \\ f(2) = 14 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **esiste** una radice in $[1, 2]$ e, per la **monotonia** di f in I, è **unica**



Esercizio: funzioni di iterazione

Per trovare una funzione di iterazione bisogna operare sull'equazione $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$$

1) $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x \quad \Rightarrow \quad x = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = \varphi_1(x)$

2) $x^3 + 4x^2 - 10 + x = x \quad \Rightarrow \quad x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = \varphi_2(x)$

3) $x^2 = \dfrac{1}{4}(10 - x^3) \quad \Rightarrow \quad x = +\dfrac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = \varphi_3(x)$

4) $x^3 = 10 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad x = (10 - 4x^2)^{1/3} = \varphi_4(x)$

5) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\dfrac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} = \varphi_5(x)$

OSS: φ_1 è la funzione del metodo di Newton-Raphson.

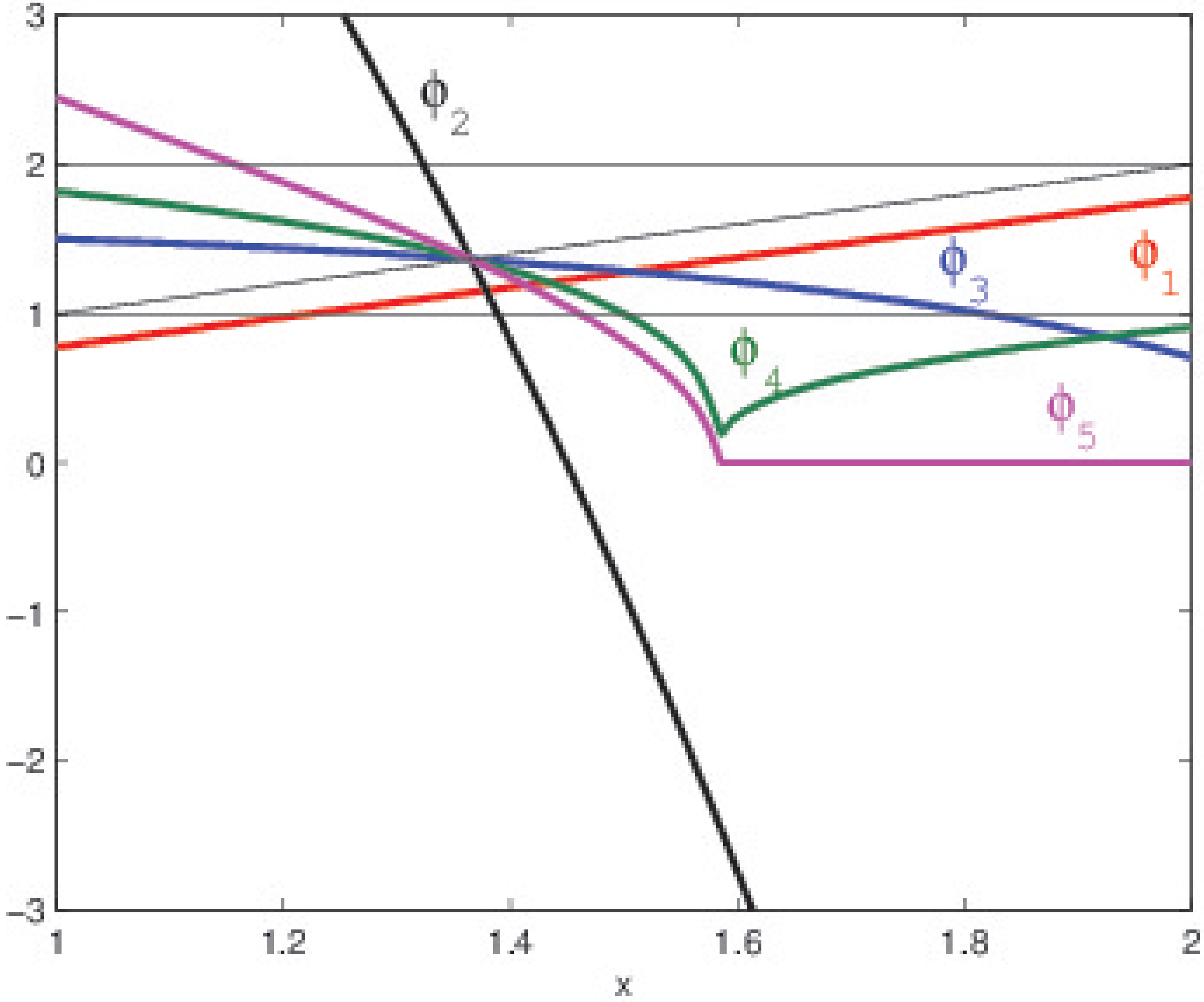
Metodo delle approssimazioni successive

Calcoliamo la successione delle approssimazioni per le varie funzioni di iterazione prendendo come punto iniziale $x_0 = 1.5$

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Iter	$\mathbf{x_k = \varphi_1(x_{k-1})}$	$\mathbf{x_k = \varphi_2(x_{k-1})}$
1	1.50000000000000	1.500000000000
2	1.37333333333333	-0.875000000000
3	1.36526201487463	6.732421875000
4	1.36523001391615	-469.720012001693
5	1.36523001341410	$\mathbf{1.03 \times 10^8}$

Iter	$x_k = \varphi_3(x_{k-1})$	$x_k = \varphi_4(x_{k-1})$	$x_k = \varphi_5(x_{k-1})$
1	1.500000000	1.500000000	1.500000000
2	1.286953768	1.000000000	0.816496581
3	1.402540803	1.817120593	2.996908806
4	1.345458374	0.737397496 − 1.277209928i	0.000000000 − 2.941235061i
5	1.375170253	2.497908940 + 0.406090203i	2.753622388 + 2.753622388i
6	1.360094193	1.629663175 − 1.951899706i	1.814991519 − 3.534528790i
7	1.367846968	2.897699627 + 1.057120250i	2.384265848 + 3.434388064i
8	1.363887003	2.312403297 − 2.130274605i	2.182771900 − 3.596879228i
9	1.365916733	3.053449960 + 1.539322326i	2.296997587 + 3.574104462i
10	1.364878217	2.713757970 − 2.154809526i	2.256510286 − 3.606561220i
11	1.365410061	3.109236945 + 1.821357227i	2.279179049 + 3.601936572i
12	1.365137821	2.927459008 − 2.147135127i	2.271142587 − 3.608371470i
13	1.365277208	3.130026434 + 1.971686530i	2.275631311 + 3.607451621i
14	1.365205850	3.036651865 − 2.137943594i	2.274039927 − 3.608725567i
15	1.365242384	3.138432311 + 2.048621871i	2.274928362 + 3.608543344i
16	1.365223680	3.091432208 − 2.132017331i	2.274613384 − 3.608795481i
17	1.365233256	3.142102509 + 2.087260835i	2.274789213 + 3.608759411i
18	1.365228353	3.118681230 − 2.128745110i	2.274726876 − 3.608809311i
19	1.365230863	3.143794018 + 2.106492439i	2.2747616734 + 3.60880217i
20	1.365229578	3.132180323 − 2.127044558i	2.274749337 − 3.608812048i
...			
25	1.365230029	3.145180034 + 2.123063434i	2.274754931 + 3.608812641i
...			
30	1.365230013	3.144978450 − 2.125383768i	2.274754877 − 3.608812723i



3
2
1
0
−1
−2
−3
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x
ϕ_2
ϕ_3
ϕ_1
ϕ_4
ϕ_5

Convergenza: condizione sufficiente

Teorema. Se φ è **derivabile** in $I = [a, b]$ e

$i)$ $\varphi : I \ \rightarrow \ I \Leftrightarrow a \leq \min_{x \in I} \varphi(x) \leq \max_{x \in I} \varphi(x) \leq b$

$ii)$ $\exists \ \lambda \in (0, 1)$ tale che $|\varphi'(x)| \leq \lambda, \ \ x \in I$

$\Rightarrow$ $\alpha)$ esiste un **unico punto unito** $\xi \in I$ di $\varphi(\xi)$

$\beta)$ la successione $x_k = \varphi(x_{k-1})$ è **convergente** a ξ per ogni **approssimazione iniziale** $x_0 \in I$

Dimostrazione dell'esistenza

$$\varphi : I \ \to \ I \quad \overset{i)}{\Rightarrow} \quad \varphi(a) \geq a \qquad \varphi(b) \leq b$$

Se vale una delle uguaglianze

$\Rightarrow \exists$ almeno **un punto unito**

Altrimenti

posto $\quad F(x) := x - \varphi(x), \qquad$ con $\qquad F \in C(I)$

avremo $\quad F(a) = a - \varphi(a) < 0 \quad$ e $\quad F(b) = b - \varphi(b) > 0$

$\Rightarrow \exists$ almeno uno **zero** di $F(x) \Leftrightarrow \exists$ almeno un **punto unito** di φ

Dimostrazione dell'unicità

Supponiamo per **assurdo** che esistano **due punti uniti** $\xi_1 \neq \xi_2$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
0 < |\xi_1 - \xi_2| \; &= \underbrace{|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|}_{\textbf{punto unito}} = \\
&= \underbrace{|\varphi'(\sigma)(\xi_1 - \xi_2)|}_{\textbf{Th. di Lagrange}} = |\varphi'(\sigma)|\,|(\xi_1 - \xi_2)| \le \\
&\le \underbrace{k}_{ii)} |\xi_1 - \xi_2| < \; |\xi_1 - \xi_2|, \quad k \in (0,1)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione della convergenza

$$\forall x_0 \in I \Rightarrow \quad 0 < |e_k| = |\xi - x_k| = \underbrace{|\varphi(\xi) - \varphi(x_{k-1})|}_{\text{Th. di Lagrange}} = |\varphi'(\sigma)|\,|\xi - x_{k-1}| \leq$$

$$\leq \lambda\ |\xi - x_{k-1}| = \lambda |e_{k-1}|$$

$$\Rightarrow \quad |e_k| \leq \lambda\ |e_{k-1}| \leq \lambda^2\ |e_{k-2}| \leq \ldots \leq$$

$$\leq \lambda^k\ |e_0| \leq \lambda^k (b-a)$$

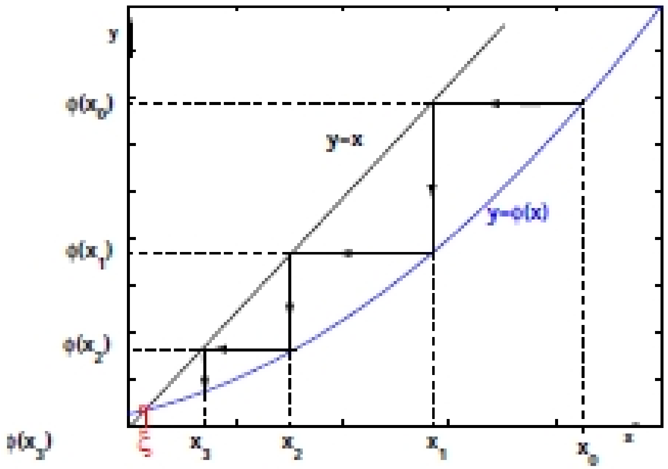
$$\lim_{k\to\infty} |e_k| \leq \lim_{k\to\infty} \lambda^k (b-a) \underbrace{=}_{ii)\ \lambda\in(0,1)} 0$$

Proprietà della successione delle approssimazioni

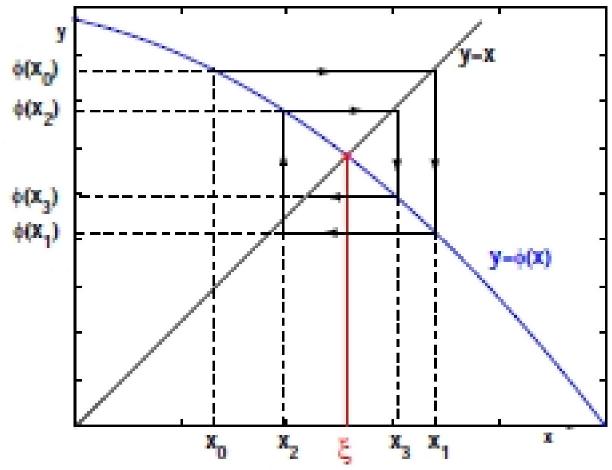
Dal **Teorema di Lagrange** si ha

$$e_k = \xi - x_k = \varphi(\xi) - \varphi(x_{k-1}) =$$

$$= \varphi'(t_k)(\xi - x_{k-1}) = \varphi'(t_k)e_{k-1} \qquad t_k \in [x_{k-1}, \xi]$$



$0 \leq \varphi'(x) < 1$



$-1 < \varphi'(x) \leq 0$

Proprietà della successione delle approssimazioni

$$e_k = \varphi'(t_k)e_{k-1}, \quad t_k \in [x_{k-1}, \xi]$$

- Se $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per $x \in I$ la successione $\{x_k = \varphi(x_{k-1})\}$, è **monotona crescente** (se $e_0 > 0$) o **descrescente** (se $e_0 < 0$) $\Rightarrow$ le approssimazioni sono per **difetto** (se $\xi > x_0$) o per **eccesso** (se $\xi < x_0$)

- Se $-1 < \varphi'(x) \leq 0$ per $x \in I$ la successione $\{x_k = \varphi(x_{k-1})\}$, **non è monotona** $\Rightarrow$ le approssimazioni sono **alternativamente** per **difetto** e per **eccesso**

Ordine di convergenza

Teorema. Se

$i)$ $\varphi \in C^{\mathbf{p}}(I)$ con I intorno di un punto unito ξ di φ

$ii)$ la successione delle approssimazioni $\{x_k\}$ è **convergente**

$iii)$ $\varphi(\xi) = \xi, \quad \varphi^{(\nu)}(\xi) = 0 \qquad \nu = 1, ..., \mathbf{p} - 1$

$\varphi^{(\mathbf{p})}(\xi) \neq 0$

$\Rightarrow$ il metodo ha **ordine di convergenza** $\mathbf{p}$

Dimostrazione

Sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned}\varphi(x_k) &= \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x_k-\xi) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(x_k-\xi)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\xi)(x_k-\xi)^{p-1} + \underbrace{\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_k)(x_k-\xi)^p}_{\text{errore nella forma di Lagrange}} = \\ &\underbrace{=}_{iii)} \varphi(\xi) + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_k)(-e_k)^p \qquad t_k \in [x_k, \xi]\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{k+1} = \xi - x_{k+1} = \varphi(\xi) - \varphi(x_k) = -\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_k)(-1)^p\,(e_k)^p$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \underbrace{\frac{|\varphi^{(p)}(\xi)|}{p!}}_{\text{fattore di convergenza}} = C > 0}$$

ordine di convergenza (exponent p) — **fattore di convergenza**

Esempi

- Se $\varphi'(\xi) \neq 0 \Rightarrow \; p = 1$ la convergenza è **lineare**:

$$C = |\varphi'(\xi)| \leq k := \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$$

coefficiente

di contrazione

- **Metodo delle tangenti**: $\boxed{\varphi_T(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$

$$\varphi_T'(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

$$\varphi_T''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } f''(\xi) \neq 0 \quad \Rightarrow p = 2 \\ = 0 & \text{se } f''(\xi) = 0 \quad \Rightarrow p > 2 \end{cases}$$

Se $p = 2$ la convergenza è **quadratica**

Criteri di arresto

Se k è il **coefficiente di contrazione** allora

$$|e_n| = \quad |\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq k\,|\xi - x_{n-1}|$$

$$|\xi - x_{n-1}| = |\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq |\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}| =$$

$$= |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| + |x_n - x_{n-1}| \leq$$

$$\leq k|\xi - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |\xi - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$$

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|}$$ **Stima a posteriori**

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k}(b-a)}$$ **Stima a priori**

Esercizio 3

Individuare una funzione di iterazione adatta ad approssimare la radice dell'equazione non lineare

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

nell'intervallo $[0.05, 0.15]$ con il metodo delle approssimazioni successive.

Soluzione

Dall'equazione non lineare si può ricavare la **funzione di iterazione**

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1.564}\left(\lambda e^{\lambda} + 0.435(e^{\lambda} - 1)\right)$$

φ_1 è **monotona crescente** in $I = [0.05, 0.15]$ con

$$0.0649 \approx \varphi_1(0.05) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_1(0.15) \approx 0.2120$$

inoltre $|\varphi_1'(x)| = \frac{e^{\lambda}}{1.564}(1.435 + \lambda) \leq |\varphi_1'(0.15)| \approx 1.178$

Non sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema e la successione non converge per qualsiasi scelta del punto iniziale x_0

Consideriamo un'altra **funzione di iterazione**

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

$$\varphi_2(x) = \log\left(1.564 - \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)\right)$$

$i)$ $\varphi_2(x)$ è **monotona decrescente** in $I = [0.05, 0.15]$ con

$$0.05 < 0.0905 \approx \varphi_2(0.15) \leq \varphi_2(x) \leq \varphi_2(0.05) \approx 0.1115 < 0.15$$

$ii)$ $|\varphi_2'(x)|$ è **monotona crescente** in $I = [0.05, 0.15]$ con

$$|\varphi_2'(x)| \leq \varphi_2'(0.15) \approx 0.50 < 1$$

$\Rightarrow$ la successione $x_k = \varphi_2(x_{k-1})_{k\geq 1}$ **converge** alla radice per ogni $x_0 \in I$

Iterazioni

k	$x_k = \varphi_1(x_{k-1})$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	$\|f(x_k)\|$
0	0.10000000000000	10.00000000000000	-0.03541286063299
1	0.13541286063299	0.03541286063299	-0.05360628710046
2	0.18901914773345	0.05360628710046	-0.08728511576238
3	0.27630426349583	0.08728511576238	-0.15929024388636
4	0.43559450738219	0.15929024388636	-0.35369164947571
5	0.78928615685791	0.35369164947571	-1.16969371781202
6	1.95897987466993	1.16969371781202	-12.37665034099773
7	0.00000143356302*1.0e+007	0.00000123766503*1.0e+007	-2.15316849866277*1.0e+007
8	2.15316993222579*1.0e+007	2.15316849866277*1.0e+007	-Inf
9	Inf	Inf	NaN
10	Inf	NaN	NaN

Iterazioni

k	$x_k = \varphi_2(x_{k-1})$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$\lvert f(x_k)\rvert$
0	0.10000000000000	10.00000000000000	-0.00120776062808
1	0.10120776062808	0.00120776062808	0.00025397482838
2	0.10095378579970	-0.00025397482838	-0.00005342976283
3	0.10100721556253	0.00005342976283	0.00001123925127
4	0.10099597631126	-0.00001123925127	-0.00000236428377
5	0.10099834059503	0.00000236428377	0.00000049734771
6	0.10099784324732	-0.00000049734771	-0.00000010462151
7	0.10099794786884	0.00000010462151	0.00000002200806
8	0.10099792586078	-0.00000002200806	-0.00000000462959
9	0.10099793049037	0.00000000462959	0.00000000097388
10	0.10099792951649	-0.00000000097388	-0.00000000020486

Esercizio 7

Esercizio **7.43** L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Esercizi di Calcolo Numerico, II ed.

Data l'equazione

$$f(x,\alpha) = x \log x - 2x + \alpha = 0$$

- individuare per quali valori di α l'equazione ammette una radice $\xi \in [0.5, 1.5]$

- posto $\alpha = 2$, verificare che la funzione di iterazione

$$\varphi(x) = x \log x - x + 2, \qquad x \in [0.5, 1.5]$$

  soddisfa le ipotesi del **teorema del punto unito**

- perchè l'ordine di convergenza della successione $x_n = \varphi(x_{n-1})$ è 2?

La funzione f è definita per $x > 0$, inoltre la sua deravita prima è data da

$$f'(x, \alpha) = \log x - 1$$

Per cui per ogni α, $f(x, \alpha)$ è decrescente in I in quanto $f'(x, \alpha) < 0 \quad \forall x \in I = [0.5, 1.5]$; l'esistenza di un'unica radice è assicurata dalle condizioni

$$f(0.5, \alpha) > 0 \quad \wedge \quad f(1.5, \alpha) < 0$$

da cui si ricava

$$A = (1 - 0.5 \log 0.5, 3 - 1.5 \log 1.5)$$

Per $\alpha = 2$

$$f(x,\alpha) = x \log x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x \log x - x + 2, \quad x \in [0.5, 1.5]$$

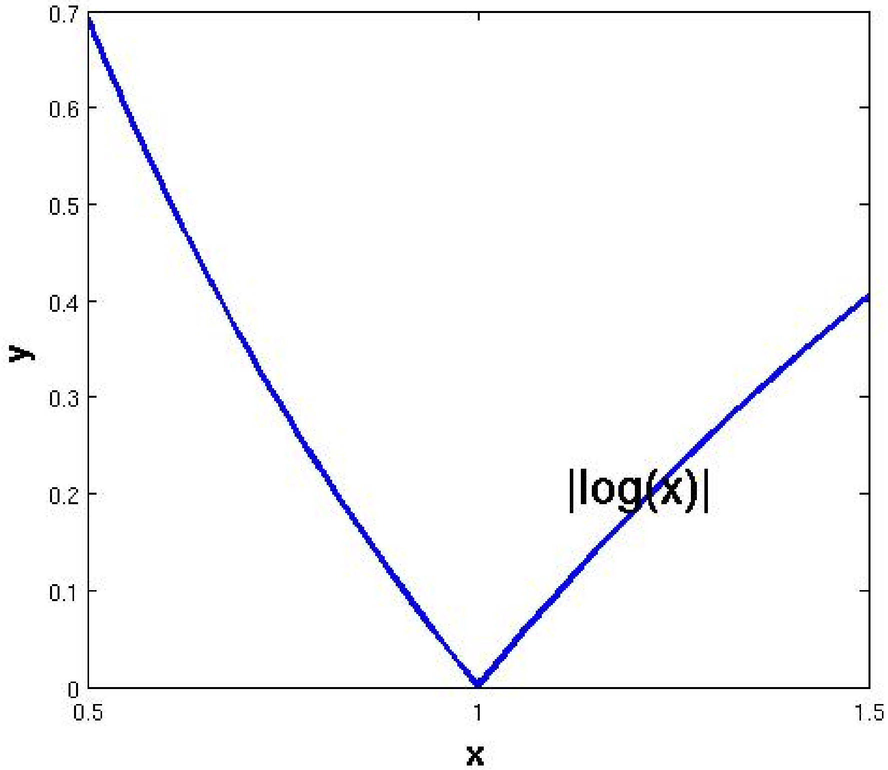
La funzione $\varphi \in C^\infty(I)$ **non** è monotona in $I = [0.5, 1.5]$, infatti

$$\varphi'(x) = \log x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Possiamo però facilmente determinare il **massimo** e **minimo** assoluti di φ in I, che vanno ricercati tra i valori assunti da φ agli estremi dell'intervallo I, e nel punto di minimo $x = 1$

$$\varphi(0.5) = 1.1534 \quad \varphi(1) = 1 \quad \varphi(1.5) = 1.1082 \Rightarrow m = 1, \quad M = 1.1534$$

$$\Rightarrow \varphi(I) \subseteq I$$



Dal grafico di $|\varphi'(x)| = |\log x|$ si vede che $|\varphi'(x)|$ è una funzione **non** monotona in I e

$$|\varphi'(x)| \leq \max |\log(0.5)|, |\log(1.5)| = \log 2 = 0.69315 < 1$$

Per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di punto unito.

$$f(x) = x \log x - 2x + 2 = 0$$

Infine, si ha che $\xi = 1$ è la radice di f e si è già visto che

$$\varphi'(1) = 0$$

Poichè $\varphi''(1) = 1$, l'ordine di convergenza è esattamente 2.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§ **3.1, 3.2, 3.3, 3.4 (escluso metodo di falsa posizione), 3.5, 3.6 (escluso metodo delle secanti con estremo fisso), 3.7, 3.9, 3.10**

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli *Esercizi di Calcolo Numerico*
Cap. 1: **1.1-1.2, 1.4-1.7, 1.9-1.11, 1.13-1.14, 7.29, 7.43, 7.54-7.55, 7.61-7.62**