Calcolo Numerico

A.A. 2012-2013

Esercitazione n. 10

Metodi diretti per la soluzione di sistemi lineari

07-05-2013

Matrici

- Una matrice si può definire come un **insieme di vettori riga** separati da un punto e virgola oppure di vettori colonna separati da uno spazio o una virgola

```
>> A = [2 5 7; 1 7 9; 8  1 -4]

A =

     2     5     7

     1     7     9

     8     1    -4
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

```
>> A = [[2;1;8] [5;7;1] [7;9;-4]]

A =

     2     5     7

     1     7     9

     8     1    -4
```

Matrici

- Per conoscere la dimensione di una matrice A di usa il comando **`size(A)`** che restituisce un vettore di 2 componenti di cui la prima indica il numero di righe mentre la seconda il numero di colonne

Esempio: Se A = [3 5 8; -1 2 4]

```
>> size(A)

ans =
      2     3
```

num.righe **num.colonne**

```
>> [r c] = size(A)
```

Per memorizzare le dimensioni della matrice

Individuare elementi

- Per estrarre un elemento da una matrice il comando è

```
nome_matrice(indice_riga, indice_colonna)
```

Esempio: estrarre l'elemento di A di indice 2,3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

```
>> A(2,3)

ans =

     0
```

Esempio: estrarre la terza colonna di A

```
>> A(:,3)

ans =

     3

     0
```

Individuare elementi

Esempio: Estrarre la prima riga di A

```
>> A(1,:)

ans =

     3     0     3
```

`A(i,j)`	restituisce l'elemento i,j della matrice A
`A(i,:)`	restituisce il vettore riga corrispondente alla riga i della matrice A
`A(:,j)`	restituisce il vettore colonna corrispondente alla colonna j della matrice A
`A(i,m:p:n)`	restituisce un vettore riga contente gli elementi nelle colonne da m a n con passo p della i-esima riga della matrice A

Individuare elementi

Esempio: estrarre il vettore riga contenente gli elementi nelle colonne 1,3 della terza riga della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & -7 & 9 \\ 2 & 4 & 20 & -2 & 1 \\ 4 & 10 & 19 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 0 & 20 & 3 \end{pmatrix}$$

```
>> A(3,1:2:3)

ans =

     4     19
```

Esempio: estrarre il vettore colonna contenente gli elementi nelle righe 2,4,6 della quarta colonna di A

```
>> A(2:2:end,4)

ans =

    -2

     0

     6
```

Estrarre sottomatrici

`A(m:k, i:j)` indica la sottomatrice di A con le righe da m a k, e le colonne da i a j.

`A(:, i:j)` sottomatrice delle colonne da i a j.

`A(m:k, :)` sottomatrice delle righe da m a k.

Esempio: Sia `A=[1 2 0; 3 4 1; 2 6 3]`, estrarre la sottomatrice con indici di riga da 2 a 3 e di colonna da 1 a 3

```
>> b = A(2:3,1:3)

  b = 3   4   1

      2   6   3

% è equivalente a b=A(2:3, :) ovvero   b=A(2:3, 1:end)
```

Aggiungere elementi

- **Aggiunta alla matrice A di una colonna:** `A=[A u]` aggiunge ad `A` il vettore `u` come ultima colonna
  - u <u>deve essere vettore colonna</u>, se è vettore riga `A=[A u']`

Esempio: Sia `A=[1 2 0; 3 4 1; 2 6 3]`. Aumentarne la dimensione aggiungendo il vettore `u = [-1; 4;0]` come ultima colonna

```
>> A = [A u]

A =

      1      2      0     -1

      3      4      1      4

      2      6      3      0
```

Aggiungere elementi

- **Aggiunta alla matrice A di una riga:** `A=[A; v]` aggiunge ad `A` il vettore v come ultima riga `v`

Esempio: Sia `A=[1 2 0; 3 4 1; 2 6 3]`. Aumentarne la dimensione aggiungendo il vettore `u = [-1; 4;0]` come ultima riga

```
>> A = [A; u']

A =

     1     2     0

     3     4     1

     2     6     3

    -1     4     0
```

Nota: **u è definito come vettore colonna**

Eliminare righe o colonne

- `A(i,:) =[]` elimina la i-ma riga di A
- `A(: , m:k)=[]` elimina tutte le colonne di indici da m a k

Esempio: Sia `A = [1 2 0; 3 4 1; 2 6 3]`. Eliminare la seconda riga di A. Eliminare la prima e la seconda colonna di A.

```
>> A(2,:)=[]

   A =

        1        2        0

        2        6        3

>> A(:,[1 2])=[]

A =

      0

      1

      3
```

Annullare righe o colonne

- `A(i,:) =0` sostituisce alla i-ma riga di A un vettore di elementi nulli
- `A(: , m:k)=0` sostituisce tutte le colonne di indici da m a k con vettori di elementi nulli

Esempio: Sia **`A = [1 2 ; 3 4].`** Annullare la seconda riga.

```
>> A(2,:)=0
A =
      1      2
      0      0
```

Esempio: Sia **`A = [1 2 0; 3 4 1; 2 6 3].`** Annullare la prima e la seconda colonna.

```
>> A(:,[1 2])=0
A =
      0      0      0
      0      0      1
      0      0      3
```

Il comando colon :

- `A(:)` organizza gli elementi della matrice in un vettore colonna (posiziona le colonne di A una sotto l'altra)
- Usando la stessa strategia `A(k)` indica il k-esimo elemento di A, ovvero il k-esimo elemento del vettore colonna in cui è memorizzata A

Esempio: Se `A = [1 0 3; 4 2 1]`

```
>> A(:)
ans =
     1
     4
     0
     2
     3
     1
>> A(5)
ans =
     3
```

Operazioni somma e differenza

- Gli operatori `+ - * /` si applicano direttamente a vettori e matrici quando le dimensioni sono conformi
- **Somma di vettori o matrici**

```
>> D = A + B
```

  - A e B devono avere la stessa dimensione
  - D ha la stessa dimensione di A e B

- **Differenza di vettori o matrici**

```
>> D = A - B
```

  - A e B devono avere la stessa dimensione
  - D ha la stessa dimensione di A e B

- **Trasposta di una matrice**

```
>>A=A'
```

Operazioni somma e differenza

Esempio: Siano `v = [0 -4 5 7]` e `w = [1;9;2;0]`.

```
>> v+w     % non è corretto in quanto v è un vettore riga
  mentre w è un vettore colona

>> y=v+w'    % è corretta

  y =

     1     5     7     7
```

Esempio: Siano `A = [0 -4; 5 7]` e `B = [1 9; 2 0]`.

```
>> C = A - B

C =

    -1   -13

     3     7
```

Operazione prodotto

- **Prodotto righe-colonne di matrici C=A*B**
  - $\#C_A = \#R_B$
    - Il numero di colonne di A deve essere uguale al numero di righe di B
  - C ha dimensione = [num.righe di A, num.colonne di B]

```
>> C = A * B
```

- **Prodotto elemento per elemento D=A.*B**
  - `size(A) = size(B)`
    - A e B devono avere la stessa dimensione
  - D ha la stessa dimensione di A e B
  - D(i,j) = A(i,j)*B(i,j)   per tutti gli indici i e j

```
>> D = A .* B
```

Operazione prodotto

Esempio: Siano `v = [0 -4 5 7]` e `w = [1;9;2;0]`.

```
>> v*w % prodotto scalare di due vettori
ans =
   -26
>> w*v
ans =
     0    -4     5     7
     0   -36    45    63
     0    -8    10    14
     0     0     0     0
```

`>> v*w'` e `w*v'` non sono corrette!

Operazione prodotto

Esempio: Siano `v = [0 -4 5 7]` e `w = [1;9;2;0]`.

```
>> v.*w'
ans =
     0   -36    10     0
```

`>> v.*w` non è corretta!

Esempio: Siano `A = [0 -4; 5 7]` e `B = [1 9; 2 0]`.

```
>> C = A * B
C =
    -8     0
    19    45
>> D = A.*B                              % Nota:  D ≠ C
D =
     0   -36
    10     0
```

Altre operazioni

- **Prodotto per uno scalare:** **`k*v`** moltiplica ogni elemento del vettore (o matrice) v per lo scalare k

Esempio: **`Sia v = [4 2 -1]`**

```
>> 3*v

ans =

    12      6    -3
```

- **Somma o differenza con uno scalare**: **`v + a`** somma ad ogni elemento di v (vettore o matrice) il numero a.

```
>> v-2

ans =

     2      0    -3
```

Altre operazioni

- **Potenza**: **`A^n`** (A matrice quadrata, n intero >0) moltiplica A n volte per se stessa.

```
>> A = [4 1; 6 9];
>> A^3
   166   139
   834   861
```

Operazioni elemento per elemento

- `C = A .*B` Prodotto elemento per elemento C(i,j) = A(i,j)*B(i,j)
  - A e B devono avere le stesse dimensioni
- `C = A./B` Divisione elemento per elemento C(i,j)=A(i,j)/B(i,j)
  - A e B devono avere le stesse dimensioni
- `C = A .^B` Ciascun elemento di A viene elevato a potenza, con esponente l'elemento corrispondente di B C(i,j) = A(i,j)^B(i,j)

Operatori relazionali

- Si applicano a matrici o vettori aventi la stessa dimensione e sono operazioni elemento per elemento
  - `C = A < B` minore
  - `C = A <= B` minore o uguale
  - `C = A > B` maggiore
  - `C = A >= B` maggiore o uguale
  - `C = A == B` uguale
  - `C = A ~= B` diverso

- La matrice di output C ha la stessa dimensione di A e B
  - `C(i,j) = 1` se la relazione è verificata,
  - `C(i,j) = 0` se la relazione non è verificata

Operatori relazionali

Esempio:

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> B = [0 2 4; 3 5 6; 3 4 9]
B =
     0     2     4
     3     5     6
     3     4     9
>> A==B
ans =
     0     1     0
     0     1     1
     0     0     1
```

Verificare anche gli altri operatori

Operatori logici

- Si applicano a matrici o vettori aventi la stessa dimensione e sono operazioni elemento per elemento
  - `C = A & B` and
  - `C = A | B` or
  - `C = A ~ B` not
  - `C = xor(A, B)` or esclusivo

- `all(v)` restituisce 1 se tutti gli elementi del vettore v sono diversi da zero, 0 altrimenti. Se v è una matrice?

- `any(v)` restituisce 1 se almeno un elemento del vettore v è diverso da zero, 0 altrimenti. Se v è una matrice?

Operatori logici

Esempio: Siano **`x=[0 5 3 7]`** ed **`y=[0 2 8 7]`**

```
>> x>y
ans =
      0     1     0     0
>> x>4
ans =
      0     1     0     1
>> m=(x>y)&(x>4)
m =
      0     1     0     0
>> p= x|y
p =
      0     1     1     1
```

- Nota: qualsiasi intero $\neq 0$ è considerato vero

Funzioni

- `sum(A)` se A e' un vettore calcola la somma degli elementi.
  Se A e' una matrice? (usare lo help)
- `prod(A)` se A e' un vettore calcola il prodotto degli elementi.
  Se A e' una matrice?
- `D=det(A)` calcola il determinante di A (**A deve essere una matrice quadrata**)
- `R=rank(A)` calcola il numero di righe linearmente indipendenti di A
- `N=norm(A,n)` calcola la norma n di A.
  - Se n = 1, calcola la norma 1
  - n = 2, calcola la norma 2
  - n = inf, calcola la norma infinito

Funzioni

- `B=inv(A)` calcola la matrice inversa di A (**A è una matrice quadrata**)

- `A=zeros(m,n)` crea una matrice di zeri dimensione m x n
- `A=ones(m,n)` crea una matrice di uno dimensione m x n:
- `D=eye(m,n)` la matrice D ha tutti 1 in posizione diagonale (se D è quadrata, D=eye(n) è la matrice identità)

Alcune funzioni

- `D=diag(v)` costruisce una matrice diagonale con il vettore v sulla diagonale principale
- `v=diag(D)` estrae la diagonale principale della matrice D
- `w=diag(D,k)` se $k > 0$ estrae la k-esima diagonale superiore, se $k < 0$ estrae la k-esima diagonale inferiore
- `T = triu(A)` estrae la parte traingolare superiore di A. T è una matrice triangolare superiore
- `T = triu(A,k)` estrae gli elementi che sono al di sopra della k-esima diagonale di A.
- `T = tril(A)` ? (usare lo help)
- `R=rand(m,n)` matrice di dimensione mxn i cui elementi sono numeri casuali uniformemente distribuiti tra 0 e 1
- `R= randn(m,n)` matrice mxn i cui elementi sono numeri casuali con distribuzione normale di media 0 e varianza 1

Esercizio

- Data la matrice A calcolare il determinante, il rango e le norme 1 e infinito.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

  - scambiando la prima e la terza riga di A, il rango della matrice cambia?
  - sostituendo alla seconda riga di A, una combinazione lineare della prima e della seconda riga, il rango cambia?
  - sostituendo alla seconda riga di A, una combinazione lineare della prima e della terza riga, il rango cambia?
  - calcolare la norma 1 e la norma infinito usando le loro definizioni

- **Norma uno:** $\|A\|_1 := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *(per colonne)*

- **Norma infinito:** $\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ *(per righe)*

Esercizio - soluzione

```
>> A = [0 1 -2; -1 5 3; 2 -4 0];
>>  det(A)   %0*5*0+2*3*1+(-2)*(-4)*(-1)-2*5*(-2)-0*3*(-4)-(-
   1)*1*0
ans =
    18
>> rank(A)      %(A è non singolare!!!)
ans =
     3
>>  norm(A,1)  %(max(0+1+2,1+5+4,2+3+0)  =  max(3,10,5)  =
   10)
ans =
    10
>>  norm(A,inf)  %(max(0+1+2,1+5+3,2+4+0)  =  max(3,9,6)  =
   9)
ans =
     9
```

Esercizio - soluzione

Scambiando la prima e la terza riga di A, il rango della matrice **non** cambia

```
A =
     0     1    -2
    -1     5     3
     2    -4     0
>> B = A;
>> B(1,:)=A(3,:);,  B(3,:)=A(1,:);
>> disp(B)
     2    -4     0
    -1     5     3
     0     1    -2
>> rank(A)
ans =
     3
>> rank(B)
ans =
     3
```

Esercizio - soluzione

Sostituendo alla seconda riga di A, una combinazione lineare della prima e della seconda riga, il rango **non** cambia

```
>> B = A;
>> B(2,:)=B(1,:)-2*B(2,:);

>> B
B =
     0     1    -2
     2    -9    -8
     2    -4     0

>> rank(B)
ans =
     3
```

Esercizio - soluzione

Sostituendo alla seconda riga di A, una combinazione lineare della prima e della terza riga, **il rango cambia** (le righe della matrice non sono più linearmente indipendenti!)

```
>> B=A;
>> B(2,:)=B(1,:)-2*B(3,:);
>> B
B =
     0     1    -2
    -4     9    -2
     2    -4     0
>> rank(B)
ans =
     2
>> det(B)
ans =
     0
```

Esercizio - soluzione

```
>> norm(A,1)
ans =
    10
```

È equivalente a

```
>> max(sum(abs(A)))
ans =
    10
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

```
>> norm(A,inf)
ans =
     9
```

È equivalente a

```
>> max(sum(abs(A')))
ans =
     9
```

Esercizi

- Costruire la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 7}$
  - la I riga è `a1 = 14,12,…,2`
  - la II riga è `a2 = 1,1,…,1`
  - la III riga è `a3 = 0,0,…,0`
- Modificare l'elemento `A(1,3)` ponendolo uguale a `3`
- Estrarre 2 sottomatrici:
  - una costituita dalle ultime 3 colonne
  - una costituita dalla I e III riga e dalle colonne II e IV

Esercizi

- Costruire le matrici A e B:
  - […] sta per parte intera; usare il comando floor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & [\sqrt{1}] \\ 2 & 4 & -1 & [\sqrt{2}] \\ 3 & 9 & 1 & [\sqrt{3}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 64 & -1 & [\sqrt{8}] \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari: metodi diretti

Sistemi Lineari

matrice dei coefficienti

$$Ax = b$$

matrice dei termine noti

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad x \in \mathbb{R}^{n} \qquad b \in \mathbb{R}^{m}$$

Teorema di Rouchè-Capelli

- rango(A) = rango(A|b) <=> il sistema è risolubile

- rango(A) = rango(A|b) = n => <u>unica soluzione</u>
- rango(A) = rango(A|b) = p < n => <u>∞^{n-p} soluzioni</u>

Risoluzione di sistemi Lineari

- **Sostituzione**
- **Cramer**
  - SE A è quadrata E invertibile
  - inutilizzabile per il costo computazionale (n-1)n!(n+1)
- **Algoritmo di Gauss**
  - **operazioni elementari sulle righe**: si trasforma il sistema di partenza in un sistema equivalente, dove la matrice dei coefficienti è triangolare superiore.
  - **pivotizzazione** (parziale o totale): da un punto di vista teorico non ha importanza la scelta del pivot, tale scelta è importante quando si implementa l'algoritmo al calcolatore
    - in analisi numerica si deve sempre tener presente che si lavora con una certa approssimazione e che si ha il problema della propagazione degli errori

Algoritmo di Gauss

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \quad x \in \mathbb{R}^{n} \quad b \in \mathbb{R}^{n}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}^{n}\ t.c.\ Ax = b$$

```
>> x = A\b;
```

il simbolo nn è quello della divisione!!

```
>> x = inv(A)*b;
```

- Operatori di divisione **/ (slash)**
- **\ (backslash)** **`x=A\B`** è la soluzione dell'equazione **`Ax=B`**.
- la soluzione è calcolata mediante l'algoritmo Gaussiano con pivot parziale
- tempo richiesto minore del calcolo dell'inversa

Algoritmo di Gauss

- Se B è un **vettore**, allora **`Ax=B`** è un ordinario sistema di equazioni lineari, ed **`x`** sarà la soluzione calcolata mediante il **metodo di eliminazione di Gauss** (metodo diretto)

- Se invece B è una **matrice** avente come colonne $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots \mathbf{b_n}$
- allora **`X=A\B`** sarà a sua volta una matrice, avente come colonne $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_n}$ le soluzioni dei sistemi lineari $\mathbf{Ax_1=b_1}$, $\mathbf{Ax_2=b_2}$, … $\mathbf{Ax_n=b_n}$.

- **Slash:** **`X=B/A`** è la matrice tale che **`XA=B`**.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
A = [1 1 1; 1 1 -1; 1 -1 1];
b = [3 2 2]';
det(A)
x = A\b
```

$$(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

ci assicuriamo che il det di A sia diverso da zero

Esercizio

- Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \quad x_2 - 2x_3 = -3 \\ -x_1 \quad 5x_2 \quad 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad = 6 \end{cases}$$

- e calcolare l'inversa della matrice associata.

- La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il termine noto è

$$b = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio

```
>> A=[0  1  -2; -1  5  3; 2 -4 0];
>> b = [-3 -3 6]'; % b deve essere un vettore colonna
>> det(A) % ci assicuriamo che il determinante sia non
nullo
>> x = A\b;
>> disp(x)
     1
    -1
     1
>> IA = inv(A)
IA =
    0.6667    0.4444    0.7222
    0.3333    0.2222    0.1111
   -0.3333    0.1111    0.0556
```

Esercizio

```
>> E = eye(size(A))
E =
     1      0      0
     0      1      0
     0      0      1


>> IA2 = A\E   % risolve i 3 sistemi
                 A * IA(1,:) = (1 0 0)'
                 A * IA(2,:) = (0 1 0)'
                 A * IA(3,:) = (0 0 1)'
```

Esercizio

```
IA2 =

    0.6667    0.4444    0.7222
    0.3333    0.2222    0.1111
   -0.3333    0.1111    0.0556


>> IA == IA2
ans =
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

Metodo di eliminazione di Gauss

- Per risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$$

- si considerano la matrice A e il termine noto b associati

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

- Si moltiplica la prima riga per 4 e si sottrae alla seconda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

annullando così il secondo elemento della prima colonna di A

- Si moltiplica la prima riga per 7 e si sottrae alla terza, annullando il terzo elemento della prima colonna di A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -5 \end{array}\right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

- Si moltiplica la seconda riga per 6/3 e si sottrae alla terza

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

annullando il terzo elemento della seconda colonna di A

- In questo modo si ottiene un sistema equivalente a quello dato in cui la matrice dei coefficienti è triangolare superiore

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 = -4 \\ \quad\quad -9x_3 = 3 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Il sistema in questa forma diventa di facile soluzione, infatti, partendo dall'ultima equazione si ha

$$x_3 = -3/9 = -1/3$$

$$x_2 = (-4 + 6x_3)/(-3) = 2$$

$$x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2 = 1 + 1 - 4 = -2$$

Usando Matlab

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 0];, b = [1 0 2]';
>> tic, x =A\b, toc
x =
   -2.0000
    2.0000
   -0.3333
Elapsed time is 0.000087 seconds
```

Il comando rref

- Per studiare e risolvere un sistema qualunque si deve ridurre la matrice completa (A | b)
  - Si usa il comando rref(reduced row echelon form)

```
rref(A)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
rrefmovie(A)
```

A quadrata singolare

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad b \in \mathbb{R}^{3}$$

$$\det A = 0$$

```
A = [3 4 -1; 5 2 3; 0 1 -1];
b = [14 14 2]';
rank(A)
rank([A b])
rref([A b])
```

per vedere se il sistema è risolubile confrontiamo il rango di A con quello della matrice completa (A | b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 14 \\ 5 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (2 - z, 2 + z, z)$$

questo sistema è risolubile in quanto rango(A)=rango(A | b)=2
=> ∞ soluzioni

A rettangolare

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad A\in\mathbb{R}^{2\times 3}\quad x\in\mathbb{R}^{3}\quad b\in\mathbb{R}^{2}$$

```
A = [1 0 1; 0 -1 0];
b = [0 1]';
rank(A)
rank([A b])
rref([A b])
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=(-z,-1,z)$$

questo sistema è risolubile in quanto rango(A)=rango(A | b)=2
=> ∞ soluzioni

…riassumendo…

- A quadrata NON singolare

```
x = A\b
```

  - Matlab ci fornisce la soluzione
- A quadrata singolare o A m x n

```
rank(A)
rank([A b])
rref([A b])
```

  - rref ci restituisce la matrix ridotta
  - le soluzioni le dobbiamo scrivere noi a partire dalla matrix ridotta ottenuta

Esercizi

- Studiare e risolvere, eventualmente, i seguenti sistemi lineari:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Lanciare per l'ultima matrice il comando rrefmovie([A b])

Fattorizzazione LU

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{nxn} \quad x, b \in \mathbb{R}^{n}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists\, L, U \quad t.c. \quad A = LU$$

dove:

- U è la matrice triangolare superiore ottenuta da A mediante l'algoritmo di Gauss con pivotizzazione parziale
- L è una matrice quadrata invertibile e "a meno di permutazioni delle righe" è una matrice triangolare inferiore con tutti 1 sulla diagonale

Risoluzione di un sistema con LU

$$A = LU \quad \Rightarrow \quad Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

sistema triangolare

In Matlab

```
[L U] = lu(A);
y = L\b;
x = U\y
```

Il tempo complessivo richiesto dai tre comandi equivale a quello richiesto dall'algoritmo Gaussiano

Fattorizzazione LU

- Per l'esercizio di prima avremo la seguente fattorizzazione

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- da cui

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = -4$$
$$y_3 = 2 + 8 - 7 = 3$$

$$x_3 = -3/9 = -1/3$$
$$x_2 = (-4 + 6x_3)/(-3) = 2$$
$$x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2 = 1 + 1 - 4 = -2$$

Fattorizzazione LU

- Infatti data $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare per 4 la prima riga e sottrarla alla seconda e moltiplicare la prima riga per 7 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a destra la matrice A per la matrice

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LU

Moltiplicare la seconda riga della matrice ottenuta al passo precedente per 2 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a destra la matrice $L_1 A$ per la matrice

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LU

Ma allora la matrice triangolare superiore U ottenuta precedentemente con il metodo di eliminazione di Gauss è tale che

$$L_2 L_1 A = U$$

e quindi

$$A = (L_2 L_1)^{-1} U = L_1^{-1} L_2^{-1} U = LU$$

Si verifica facilmente che $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Quando conviene usare LU?

$$Ax = b_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

Quando si hanno più sistemi con la stessa matrice dei coefficienti A conviene decomporre una sola volta A in LU e risolvere i sistemi lineari con i comandi precedenti => risparmio di tempo

```
[L U] = lu(A);
y = L\bi;   i=1,…,k
x = U\y;
```

Esercizio

- Si scriva una funzione MATLAB che presa in ingresso una matrice triangolare superiore U e un termine noto b calcoli la soluzione x usando il l'algoritmo di sostituzione all'indietro

Sistemi triangolari superiori

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
u_{11}\,x_1 & + & u_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & u_{1k}\,x_k & + & \cdots & + & u_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & u_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & u_{2k}\,x_k & + & \cdots & + & u_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & u_{kk}\,x_k & + & \cdots & + & u_{kn}\,x_n & = & b_k \\
 & & & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & & & u_{nn}\,x_n & = & b_n
\end{array}
\right.
$$

$$\Downarrow$$

$$
UX = B \rightarrow
\begin{cases}
x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}} \\[2ex]
x_k = \left(b_k - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} u_{ki}\,x_i \right) \dfrac{1}{u_{kk}}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1
\end{cases}
$$

(Algoritmo di sostituzione all'indietro)

17

Esercizio

- Dopo essersi accertati che il sistema ammette un'unica soluzione trovare la soluzione con Gauss e mediante la decomposizione LU

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi

- Provare a scrivere uno script per risolvere un sistema triangolare con il metodo di Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Studiare il seguente sistema

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio

- Sia H la matrice di Hankel 7x7 del vettore v = (7,6,…,1) (si genera col comando hankel(v))
- Costruire una matrix A 7x7 t.c.
  - le prime 6 righe e 6 colonne siano tratte da H
  - l'ultima colonna sia la successione 7,6,…,1
  - l'ultima riga sia la successione 3*7-1,3*7-4,…1
- Risolvere se possibile il sistema lineare

  Ax = b, dove
  - $b=(0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1)^T$
- Scrivere le soluzioni