Calcolo Numerico

A.A. 2012-2013

Esercitazione n. 4

26-03-2013

Funzioni di input\output

- Per visualizzare stringhe sullo schermo

```
disp('stringa di caratteri')
```

Esempio:

```
>> disp('Oggi e'' una bella giornata')
```

- Per introdurre valori da tastiera

```
nome_variabile=input('stringa di caratteri tra apici')
```

  - il valore assegnato potrà essere di tipo scalare, vettore oppure matrice utilizzando la sintassi standard di MATLAB

Esempio:

```
>>n=input('inserisci il numero di righe: ')
inserisci il numero di righe: 3
n =
     3
>>v=zeros(n,1);  (crea un vettore di zeri di dimensione n)
```

Funzioni di input\output

- Per visualizzare sullo schermo stringhe e variabili

```
stringa = printf('stringa val=%d',variabile);
disp(stringa)
```

  - vedremo in seguito la formattazione da usare per i vari tipi di variabili, per interi si usa **%d**
- Equivalentemente

```
fprintf('stringa val = %d', variabile)
```

Esempio:

```
>> n = input('inserisci un intero');
>> s = sprintf('n = %d',n);
>> disp(s)
```

Esercizi

- Scrivere uno script che calcola il fattoriale di una un intero positivo **n** passato come input
  - qual è la funzione di MATLAB che calcola il fattoriale?

- Scrivere uno script (script1.m) che richieda il valore della variabile **x** come input e calcoli il valore di $\mathbf{e^x}$ usando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato all'ordine **n** tale che il termine n-simo sia trascurabile nella precisione di macchina
  - si confronti il risultato con il valore vero della funzione in **x** scegliendo

    x = 2 e **x = -20**

Un esempio usando Matlab

```
x =input('introduci il valore in cui calcolare la funzione,x = ')
oldsum = 0;, newsum = 1;
term = 1; % primo termine della serie
n = 0;    % indica il termine della serie

while newsum ~= oldsum, %Itera finchè il termine successivo della
                        %serie diventa trascurabile (nella
                        %precisione di macchina)
      n = n + 1;
      term = term * x/n;   % x^n/n! = (x^{n-1}/(n-1)!) * x/n
                           % aggiorna i termini della serie
      oldsum = newsum;
      newsum = newsum+term %aggiorna la somma n-sima della serie
end

approx_value = newsum;
true_value = exp(x);
disp('valore approssimato'),
disp(approx_value)
disp('valore vero')
disp(true_value)
```

If…else…end

- Test condizionale

```
if condizione1
    blocco di istruzioni
elseif condizione2
    blocco di istruzioni
else
    blocco di istruzioni
end
```

- Il primo blocco di istruzioni sarà eseguito se e solo se la Condizione1 è verificata, il secondo se e solo se la Condizione1 risulta essere falsa e la Condizione 2 vera e così via
  - condizione1 coinvolge un operatore relazionale
- Il blocco di istruzioni che segue else sarà eseguito soltanto se nessuna delle precedenti condizioni risulti essere vera.
- Il test condizionale è usato quando si vuole che un comando venga eseguito se e solo se è verificata una certa condizione

Esercizio

Consideriamo per ogni $k \in \mathbb{R}$ la funzione seguente

$$f(x) = xe^{\frac{1+x^2}{kx^2}}$$

Costruire un m-file funzione di k t.c.

- esegua un controllo su k che deve essere non nullo
- disegni il grafico di $f(x)$ nell'intervalo [1,2]
- abbia come output il punto di minimo e il valore di minimo della funzione nell'intervallo
- dica se il punto di minimo è interno all'intervallo o in uno degli estremi

Propagazione degli errori

- **Problema numerico:** è una descrizione chiara e non ambigua di una connessione funzionale tra i dati e i risultati. Se x è il vettore dei dati e y il vettore dei risultati un problema numerico può essere espresso come $y=f(x)$
- **Algoritmo:** è una sequenza finita di operazioni logiche e non ambigue che opera sui dati x e produce come risultato il vettore y^* non necessariamente uguale a y.
  - esistono diversi algoritmi per la soluzione dello stesso problema numerico
- Poiché i dati di input sono sempre affetti dagli errori di arrotondamento (dell'ordine di **eps**) occorre confrontare i risultati y^* dell'algoritmo non con la soluzione $y=f(x)$ ma con $y1 = f(fl(x))$

Stabilità

- Un metodo numerico si dice **stabile** se non propaga gli errori. In altre parole la quantità

$$\frac{\left| f(fl(x)) - y^* \right|}{\left| f(fl(x)) \right|}$$

  è dell'ordine della precisione macchina **eps**

  - l'algoritmo è stabile se non amplifica gli errori di arrotondamento
- La stabilità è quindi un concetto legato al metodo risolutivo ovvero al corrispondente algoritmo. Lo scopo dell'analisi di stabilità è di capire come avviene la propagazione degli errori. Se questa è controllata, cioè non li fa crescere, allora il metodo sarà stabile
  - uno dei problemi connessi all'instabilità è la cancellazione numerica

Propagazione dell'errore di arrotondamento

Mostrare che

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - 5I_{n-1} & n > 0 \\ \log(\frac{6}{5}) & n = 0 \end{cases}$$

non è adatto per il calcolo del seguente integrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

- studiare il segno della funzione integranda

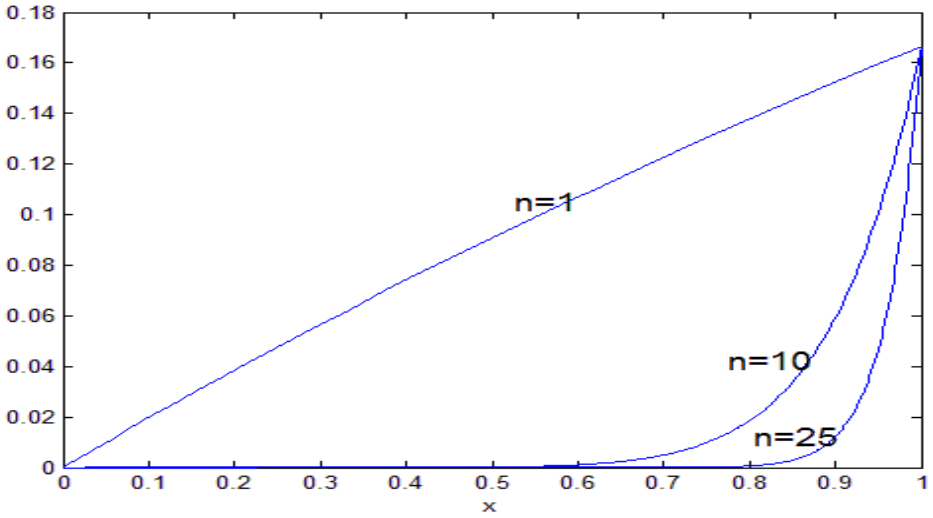
Propagazione dell'errore di arrotondamento

La funzione integranda è non negativa nell'intervallo di integrazione. Inoltre

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx \to 0$$

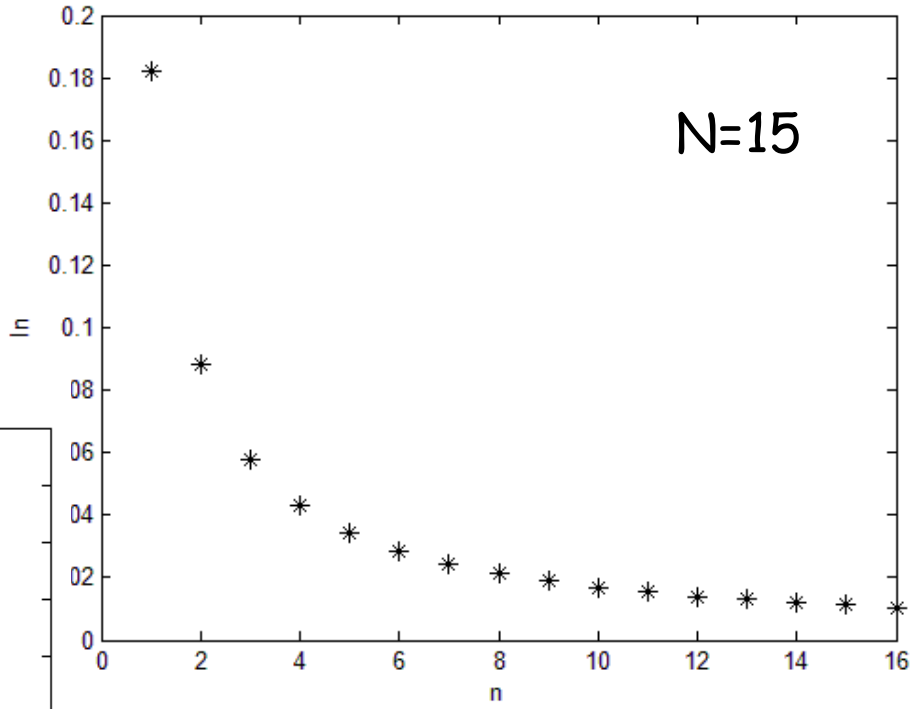
come si osserva anche dal grafico della funzione integranda

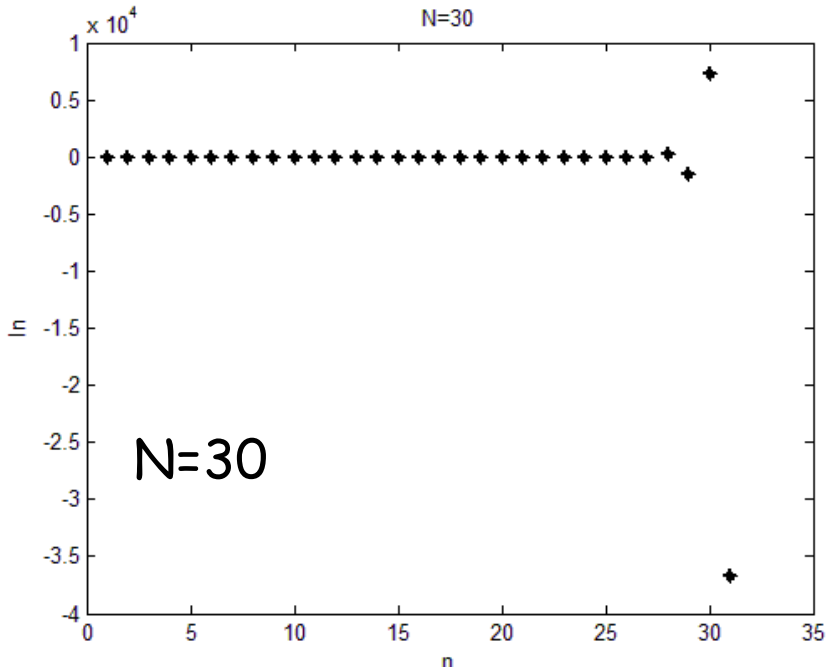
```
>> f1 = @(x)[x/(x+5)];
>> f10 = @(x)[x^10/(x+5)];
>> f20 = @(x)[x^20/(x+5)];
>> figure, fplot(f1,[0 1])
>> hold on, fplot(f10,[0 1]
>> fplot(f20,[0 1])
>> hold off
```



Propagazione dell'errore di arrotondamento

```
N = input('introdurre l''indice dell''integrale da …
calcolare, N = ')
I(1) = log(6/5);
for n = 1:N
    I(n+1) = 1/(n) - 5*I(n);
end
figure, plot(I,'*')
```





Propagazione dell'errore di arrotondamento

Avendo solo un errore di arrotondamento sul dato iniziale $I_0 = \log(6/5)$, risulta

$$\tilde{I}_0 = fl(I_0) = I_0(1+\varepsilon_0)$$

$$\tilde{I}_1 = 1 - 5\tilde{I}_0 = 1 - 5I_0(1+\varepsilon_0) = (1-5I_0) - 5I_0\varepsilon_0 = I_1 - 5I_0\varepsilon_0$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} - 5\tilde{I}_1 = \frac{1}{2} - 5I_1 + (-5)^2 I_0\varepsilon_0 = I_2 + 5^2 I_0\varepsilon_0$$

.

.

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} - 5\tilde{I}_{n-1} = I_n + (-5)^n I_0\varepsilon_0$$

Cresce in valore assoluto al crescere di n

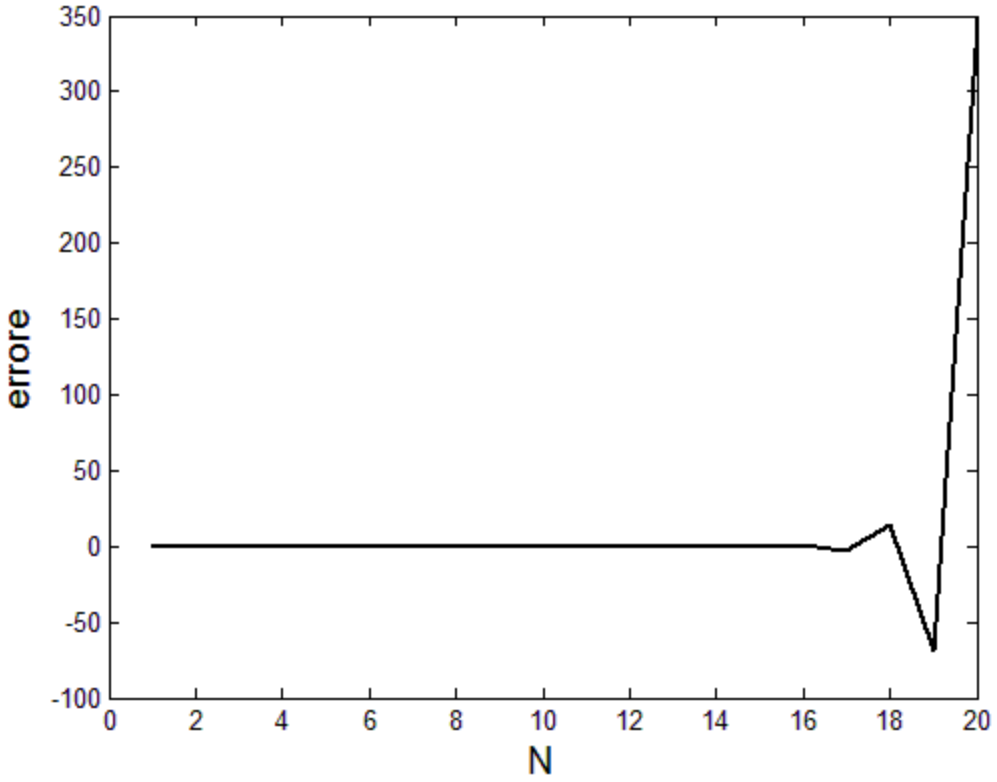
Propagazione dell'errore di arrotondamento

$$\varepsilon_0 = .2 \cdot 10^{-10}$$

$$n = 20$$

$$(-5)^{20} \approx 9.54 \cdot 10^{13}$$

$$(-5)^{20} I_0 \varepsilon_0 \approx 348 >> 0$$



Dopo 20 passi l'errore è dell'ordine delle centinaia e la misura dell'integrale è inattendibile

Condizionamento

- Un problema numerico si dice **ben condizionato** se a piccole perturbazioni (relative) sui dati corrispondono perturbazioni (relative) dello stesso ordine sui risultati. In caso contrario il problema si dice mal condizionato.
  - il condizionamento non dipende né dall'algoritmo né dagli errori di arrotondamento
  - il condizionamento dipende dal problema e dai dati di input: uno stesso problema può essere ben condizionato per alcuni valori dei dati e mal condizionato per altri valori

Condizionamento

- Supponiamo che il dato x sia perturbato mediante un Δx e poniamo

$$\bar{x} = x + \Delta x$$

in generale si ha

$$\left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{f(x)} \right| \leq k \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$$

dove k prende il nome di numero di condizionamento del problema numerico

- tanto più k è piccolo tanto più il problema è ben condizionato
- il condizionamento è una caratteristica propria del prolema numerico e non ha alcun legame né con gli errore di arrotondamento né con gli algoritmi sceti per risolverlo

Esempio

Sia $f(a,b) = a+b$ e perturbiamo a e b con Δa e Δb

$$\left|\frac{f(a,b)-f(a+\Delta a,b+\Delta b)}{f(a,b)}\right| = \left|\frac{\Delta a+\Delta b}{a+b}\right| \leq \frac{\max\{|a|,|b|\}}{|a+b|}\left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right|+\left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right)$$

SE $a+b \rightarrow 0$ => l'operazione di somma è mal condizionata => cancellazione numerica

Esercizio

Studiare il condizionamento e la stabilità di

$$f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

- qual è l'algoritmo più stabile per il calcolo di f quando $y=x+\Delta x$ con Δx piccolo?

- calcolare $\sqrt{1.0001} - 1$

  $\sqrt{0.2} - \sqrt{0.1}$

Conclusioni

- La propagazione degli errori nei calcoli dipende sia dal condizionamento del problema numerico sia dalla stabilità dell'algoritmo che si utilizza
- Un problema ben condizionato risolto con un algoritmo stabile conduce a risultati attendibili
- Si può pervenire a risultati non accurati se
  - un algoritmo stabile è applicato ad un problema mal condizionato
  - un problema mal condizionato viene risolto con un algoritmo instabile

- Un problema può essere ben condizionato per certi dati iniziali e mal condizionato per altri (operazione somma)

Esercizi di riepilogo

Consideriamo per ogni $k \in \mathrm{R}$ la funzione seguente

$$f(x) = kx^3 + \sqrt{k}\,x$$

Scrivere un m-file funzione di k tale che

- disegni il grafico di $f(x)$ nell'intervallo [0,2]
- ne trovi il punto di minimo (nell'intervallo [0,2])
- controlli il valore di k passato come input

Esercizi di riepilogo

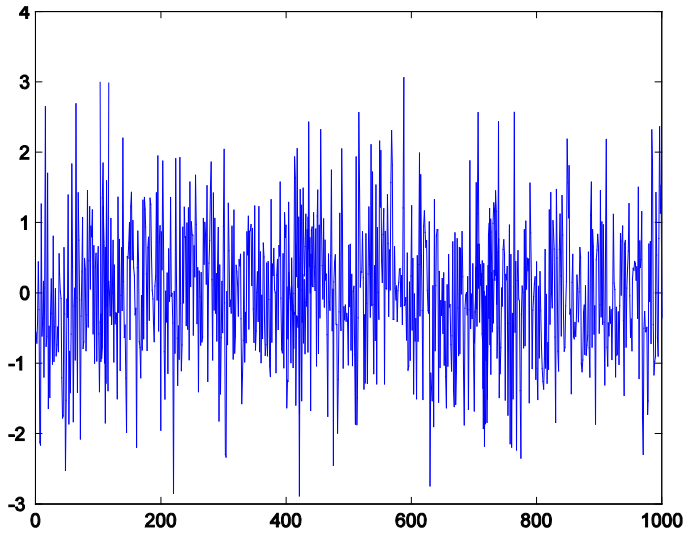
1. Si calcoli analiticamente $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$
2. Si calcoli la quantità $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$ per $x = 10^{-15}$ usando `Matlab`. Quale è l'errore commesso? (Si usi opportunamente il comando `format`). Perché l'errore è grande?
3. Si sostituisca ora a e^x la sua espansione in serie Taylor intorno a $x = 0$ arrestata al termine di secondo ordine. Si calcoli quindi un'espressione approssimata di $\dfrac{x}{e^x - 1}$.
4. Si calcoli quindi la nuova quantità con `Matlab` in corrispondenza di $x = 10^{-15}$ e si verifichi l'errore commesso in questo caso.

Esercizi di riepilogo

Scrivere una funzione che crei l'istogramma di un vettore

Caricare il vettore dei dati nella variabile "data":

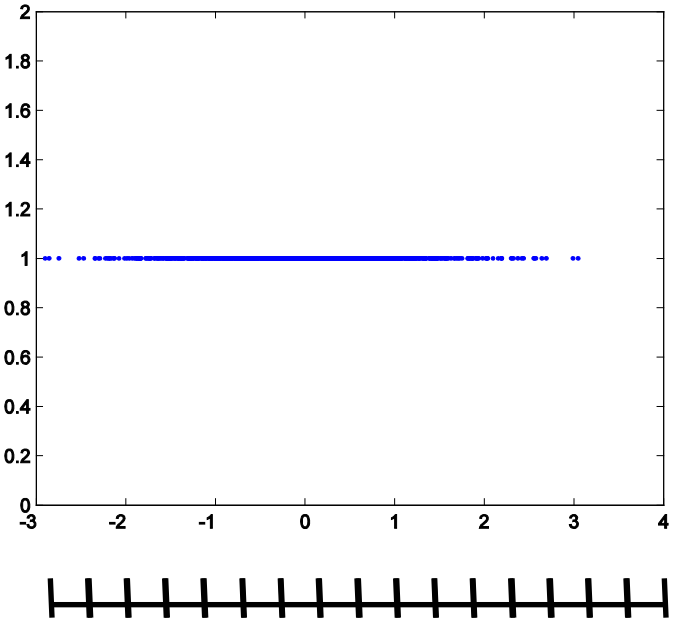
```
data = load('dato_per_istogramma.dat');
size(data)
```



Osserviamo i dati

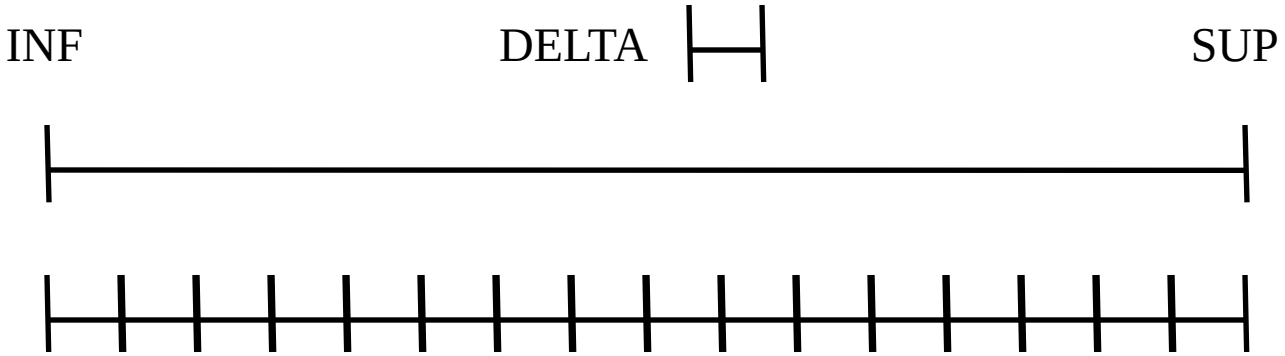
```
plot(data)
```

```
plot(data, ones(size(data)) , ' . ')
```

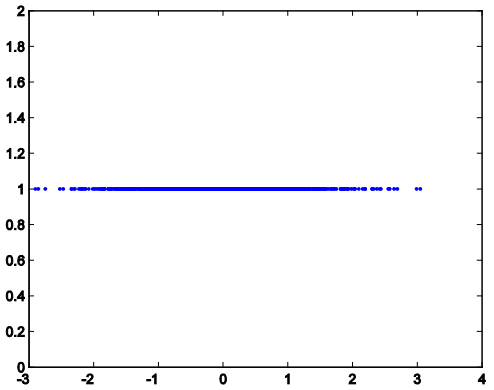


Algoritmo istogramma

Scelta degli estremi e della larghezza intervallo

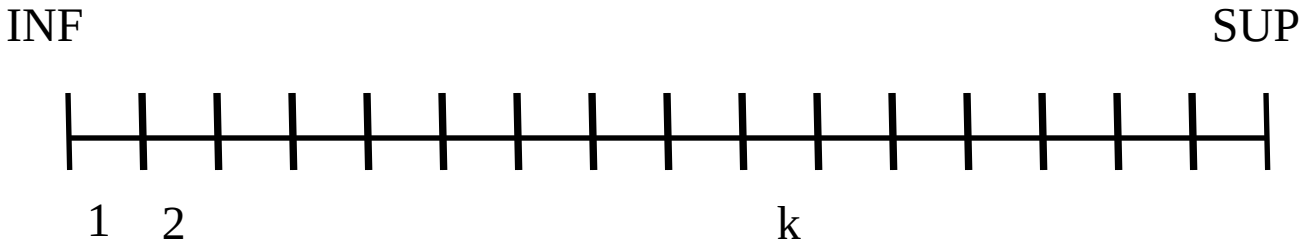


Contiamo quanti elementi del vettore cadono in ogni intervallo: creiamo un vettore il cui valore i-esimo rappresenti il numero di conteggi nell'i-esimo intervallo



Algoritmo istogramma (efficiente)

L’algoritmo appena scritto fa un ciclo di troppo...



Osserviamo che il singolo valore data(i)

INF < data(i) < SUP

0 < data(i)-INF < SUP-INF=DELTA*NUM_INT

0 < (data(i)-INF)/DELTA < NUM_INT

Istogrammi e MATLAB

Esiste un comando che fa l'istogramma delle frequenze dei valori di un vettore

```
data = load('dato_per_istogramma.dat')

hist(data)

hist(data,50)                    istogramma in 50 intervalli

[counts bins] = hist(data,50)    i conteggi in counts, i punti medi degli
                                 intervalli in bins
```