

Calcolo Numerico con elementi di programmazione

(A.A. 2015-2016)

Appunti delle lezioni sui metodi numerici
per la soluzione di sistemi lineari

Metodi Iterativi

- la soluzione si ottiene tramite approssimazioni successive (**metodi del punto unito**)
- la soluzione esatta si ottiene in un numero infinito di passi (**errore di troncamento**)
- bassa occupazione di memoria
- **problemi sparsi e/o di elevate dimensioni**

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0$$

$$X, F \in \mathbf{R}^n$$

$$\rightarrow F(X) = AX - B$$

Sistemi lineari

$$AX = B$$

$$X, B \in \mathbf{R}^n \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$F = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$$

$$0 = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=0}^n$$

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo del punto unito

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow X = \Phi(X) \text{ con } \Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$$

Se $\bar{X} \in \mathbf{R}^n$ è **radice** di F allora è **punto unito** di Φ :

$$F(\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = \Phi(\bar{X})$$

Sistemi lineari

$$AX = B \Leftrightarrow X = CX + Q \text{ con } Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \\ C = [c_{ij}]_{i,j=0}^n$$

Se $\bar{X} \in \mathbf{R}^n$ è **soluzione** di $AX = B$ allora è **punto unito** di $\Phi = CX + Q$:

$$A\bar{X} = B \Leftrightarrow \bar{X} = C\bar{X} + Q$$

Metodi iterativi per sistemi non lineari

Il **punto unito** $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$, $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzione φ_i sono chiamate **funzioni di iterazione**.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Nel caso **lineare** il **punto unito** $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n & \text{dato} \\ X^{(k)} = \mathbf{C} X^{(k-1)} + Q & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + q_i \quad i = 1, \dots, n$$

Sotto opportune ipotesi $\{X^k\}$ converge a \bar{X} , **soluzione** di $AX = B$ e **punto unito** di $X = CX + Q$

La matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è chiamata **matrice di iterazione**.

Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

Errore di troncamento: $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

\swarrow \searrow

soluzione esatta **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento, si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

Nota. In pratica ci si arresta quando $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$ (**criterio di arresto**)

Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di troncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Teorema. Sia S uno **spazio vettoriale normato** e sia $\Phi : S \rightarrow S$. Se la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a un valore $\bar{X} \in S$ e l'applicazione Φ è **continua** in $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è **punto unito** di Φ , cioè $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$.

Dim.

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X^{(k-1)}) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)}\right) = \Phi(\bar{X})$$

Convergenza: condizione sufficiente

Definizione. Un'applicazione $\Phi : S \rightarrow S$, dove S è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Phi : D \rightarrow D$ è una **contrazione**

\Rightarrow • esiste un **unico punto unito** $\bar{X} \in D$ di Φ

\Rightarrow • la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a \bar{X}
per ogni **approssimazione iniziale** $X^{(0)} \in D$

Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di Φ

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema. Se *i)* le **funzioni di iterazione** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono **continue** e **parzialmente derivabili** in D ;
ii) esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|J(X)\| \leq \lambda$ per $X \in D$
 $\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** in D

dim: $\forall X, Y \in D$, si può valutare $\|\Phi(Y) - \Phi(X)\|$ considerando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine della funzione Φ attorno a X , da cui risulta

$$\|\Phi(Y) - \Phi(X)\| \leq J(X)\|Y - X\| \leq \lambda\|Y - X\|$$

Metodi iterativi per sistemi lineari: condizione sufficiente di convergenza

Matrice Jacobiana di $\Phi = \mathbf{C}X + Q$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Corollario. Se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|\mathbf{C}\| \leq \lambda$

$\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** per ogni X

\Rightarrow il metodo iterativo è **convergente**

Dim: $\forall X \neq Y, \quad \|\Phi(X) - \Phi(Y)\| = \|\mathbf{C}(X - Y)\| \leq \|\mathbf{C}\| \|X - Y\| \leq \lambda \|X - Y\|$

Condizione sufficiente di convergenza

Teorema. Condizione sufficiente affinché un metodo iterativo sia **convergente** a \bar{X} per **qualsunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, è che

$$\|C\| < 1$$

$$E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} = (C\bar{X} + Q) - (CX^{(k-1)} + Q) =$$

$$= C(\bar{X} - X^{(k-1)}) = CE^{(k-1)} \Rightarrow \boxed{E^{(k)} = CE^{(k-1)}}$$

$$\|E^{(k)}\| = \|CE^{(k-1)}\| = \|C^2E^{(k-2)}\| = \dots = \|C^k E^{(0)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$

Relazione di compatibilità

$$\|E^{(k)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\| = \underbrace{\|C \cdot C \dots C\|}_{k \text{ volte}} \cdot \|E^{(0)}\| \leq \|C\|^k \cdot \|E^{(0)}\|$$

$$\boxed{\text{se } \|C\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0}$$

Condizione necessaria e sufficiente di convergenza

Definizione. Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ (o in modo equivalente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0$)

Teorema. Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è **convergente se e solo se** $\rho(A) < 1$.

dim. \Rightarrow Se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, allora $\|A^k\| < 1$. Dalla relazione di compatibilità $\rho(A^k) < \|A^k\|$, per cui $\rho(A^k) < 1$; poichè $\rho(A^k) = \rho^k(A)$, avremo $\rho^k(A) < 1$, ovvero $\rho(A) < 1$

dim. \Leftarrow Se $\rho(A) < 1$ allora $\exists \epsilon : \rho(A) < 1 - \epsilon$. Poichè $\rho(A) \leq \|A\|$, esiste una norma compatibile per cui $\|A\| < \rho(A) + \epsilon$, quindi $\|A\| < 1 - \epsilon + \epsilon$. Ne segue che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$. Il teorema risulta dimostrato osservando che $0 \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k$

Teorema. Un metodo iterativo **converge** per **qualsunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, **se e solo se**

$$\rho(C) < 1$$

dove $\rho(C) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ è il **raggio spettrale** della matrice di iterazione C

$$E^{(k)} = C E^{(k-1)} = \dots = C^k E^{(0)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} C^k E^{(0)} = 0 \iff \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0}_{\text{matrice convergente}} \iff \rho(C) < 1$$

Oss. E' da notare l'**indipendenza dalla scelta del punto iniziale** $X^{(0)}$, in contrasto con quanto avviene nel caso non lineare, in cui la scelta del punto iniziale influisce in modo decisivo.

Una scelta banale è $X^{(0)} = \mathbf{0}$ ma solitamente si pone $X^{(0)} = Q$

Criterio d'arresto

Se il metodo iterativo è **convergente**, si arresta il procedimento quando

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon \quad \varepsilon: \text{tolleranza prefissata}$$

- $\|E^{(k)}\| = \|X^{(k)} - \bar{X}\| = \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + X^{(k+1)} - \bar{X}\| =$
 $= \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + E^{(k+1)}\| \leq \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|$
- $\|E^{(k+1)}\| \leq \|C\| \cdot \|E^{(k)}\| \leq \|C\| (\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|)$

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \quad \text{stima a posteriori}$$

d'altra parte

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \|C\|^k \cdot E^{(1)} \leq \frac{\|C\|^{k+1}}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \leq \varepsilon \quad \text{stima a priori}$$

Stima a priori: il numero di iterazioni K necessario affinché

$$\|E^{(K)}\| < \varepsilon$$

è dato da

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|} \right) \frac{1}{\log \|C\|}$$

Velocità asintotica di convergenza

Se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una **matrice convergente**, vale la proprietà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \rho(A)$$

Dalla relazione

$$\|E^{(k)}\| = \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$

per k "grande" si ottiene

$$\frac{\|E^{(k)}\|}{\|E^{(0)}\|} \leq \|C^k\| \approx \rho^k(C)$$

⇒ L'errore si riduce di un fattore 10^{-m} all'iterazione

$$K \simeq -\frac{m}{\text{Log } \rho(C)}$$

Velocità asintotica di convergenza: $V = -\text{Log } \rho(C)$

Esercizio 1

Data la matrice

$$C(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbf{R}$$

1.1) determinare per quali valori del parametro reale β il procedimento iterativo

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k)} = C(\beta) X^{(k-1)} + Q & k = 1, 2, \dots, \quad Q = (7/8, 7/8, -1/2)^T \end{cases}$$

risulta **sicuramente convergente** per ogni $X^{(0)} \in \mathbf{R}^3$;

1.2) posto $\beta = 1/2$ e $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, dare una stima del numero di **iterazioni necessarie** affinché l'approssimazione abbia 5 decimali esatti;

Soluzione

1.1) Condizione sufficiente di convergenza: $\|C(\beta)\|_1 < 1$ oppure $\|C(\beta)\|_\infty < 1$, dove

$$C(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

è la **matrice di iterazione** del procedimento dato.

$$\|C(\beta)\|_1 = \max\left(2|\beta| + \frac{1}{2}, |\beta| + \frac{1}{4}\right) = 2|\beta| + \frac{1}{2} \quad \|C(\beta)\|_1 < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{1}{4}$$

$$\|C(\beta)\|_\infty = \max\left(\frac{3}{2}|\beta|, \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} & |\beta| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}|\beta| & |\beta| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \|C(\beta)\|_\infty < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{2}{3}$$

Nota: le condizioni su β sono **diverse** a seconda della norma che si sceglie.

$$1.2) \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \|C(\frac{1}{2})\|_1 = \frac{3}{2} > 1 \quad \|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Attenzione: in **norma uno** non si può stabilire se il metodo converge, si ha invece convergenza in **norma infinito**

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C(\frac{1}{2})\|_\infty)\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty} \right) \frac{1}{\log \|C(\frac{1}{2})\|_\infty}$$

$$\|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4}, \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \|Q\|_\infty = \max |q_i| = \frac{7}{8}, \quad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow K \geq 47$$

Condizione necessaria e sufficiente di convergenza:

$$\rho(C(\beta)) < 1$$

Autovalori di $C(\beta)$: $\det(C - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - \beta - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow 0$ con molteplicità 2, $\frac{1}{4} + \beta$

Raggio spettrale di $C(\beta)$: $\rho(C(\beta)) = \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

$$\rho(C(\beta)) < 1 \Rightarrow \boxed{-\frac{5}{4} < \beta < \frac{3}{4}}$$

Velocità di convergenza: $V(\beta) = -\text{Log}(\rho(C(\beta))) = -\text{Log} \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

Nota: questo intervallo di β **contiene** entrambi gli intervalli trovati con la condizione sufficiente ($|\beta| < \frac{1}{2}$, $|\beta| < \frac{2}{3}$).

Costruzione di metodi iterativi

$$AX = B \quad \longrightarrow \quad X = CX + Q$$

Splitting di A: $A = M + N$ dove M è una matrice **invertibile**.

$$AX = B \rightarrow (M + N)X = B \rightarrow MX = -NX + B \rightarrow$$

$$\rightarrow X = -M^{-1}NX + M^{-1}B \Rightarrow \boxed{C = -M^{-1}N \quad Q = M^{-1}B}$$

Una possibile **decomposizione** di A è

$$\boxed{A = L + D + U}$$

dove $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ (elementi **diagonali** di A)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sotto**
della diagonale principale)

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sopra**
della diagonale principale)

Metodo di Jacobi

$$M = D, N = L + U$$

$$\begin{cases} C_J = -D^{-1}(L + U) \\ Q_J = D^{-1}B \end{cases}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad Q_J = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Algoritmo J

$$X^{(k)} = C_J X^{(k-1)} + Q_J \Rightarrow$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0$$

D^{-1} è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono $-1/a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$; la matrice $(L + U)$ ha gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a 0. Moltiplicare a sinistra la matrice $(L + U)$ per D^{-1} , corrisponde a dividere ogni elemento della **i-esima** riga di $(L + U)$ per $-1/a_{ii}$

Metodo di Gauss-Seidel

$$M = D + L, N = U \Rightarrow \begin{cases} C_{GS} = -(D + L)^{-1}U \\ Q_{GS} = (D + L)^{-1}B \end{cases}$$

$$X^{(k)} = C_{GS}X^{(k-1)} + Q_{GS} \quad \Downarrow$$

Algoritmo GS

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k \geq 0$$

Riscrivendo $X^{(k+1)} = C_{GS}X^{(k)} + Q_{GS}$ come $(L+D)X^{(k+1)} = -UX^{(k)} + B$ e considerando che $(L+D)$ è una matrice triangolare inferiore mentre U è triangolare superiore con elementi nulli sulla diagonale principale, si ha

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

L' **algorithm GS** si ottiene, quindi, isolando la componente $x_i^{(k+1)}$ al primo membro.

Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

- Per **verificare** la convergenza si possono applicare alle matrici di iterazione C_J e C_{GS} le condizioni già viste:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C.S.:} \quad \|C_J\|_1, \|C_J\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad \|C_{GS}\|_1, \|C_{GS}\|_\infty < 1 \\ \text{C.N.S.:} \quad \rho(C_J) < 1 \quad \text{e} \quad \rho(C_{GS}) < 1 \end{array} \right.$$

Attenzione: Le **condizioni di convergenza** per le matrici di iterazione C_J e C_{GS} vanno **verificate** di volta in volta.

- Per alcune matrici A potrebbe convergere **solo uno** dei due metodi.
- Se convergono entrambi i metodi, quello di **Gauss-Seidel** converge **più velocemente**.

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1, 0, 0)^T,$$

1.1) verificare quale tra i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel risulta convergente;

1.2) approssimare la soluzione del sistema lineare con 6 decimali esatti.

Soluzione

$$\mathbf{1.1) } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno **norma maggiore di 1**, quindi la **condizione sufficiente** di convergenza **non è soddisfatta**. Per verificare se è soddisfatta la **condizione necessaria e sufficiente** bisogna calcolare il **raggio spettrale** delle matrici di iterazione.

Autovalori di C_J : 0 con molteplicità 3

$\Rightarrow \rho(C_J) = 0 \Rightarrow$ il metodo di Jacobi **converge**

Autovalori di C_{GS} : 0 con molteplicità 1, 2 con molteplicità 2

$\Rightarrow \rho(C_{GS}) = 2 \Rightarrow$ il metodo di Gauss-Seidel **non converge**

1.2) Per approssimare la soluzione del sistema lineare con **6 decimali esatti**, si può utilizzare il **metodo di Jacobi** arrestando le iterazioni quando

$$\|E^{(k+1)}\| \simeq \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ (criterio di arresto)}$$

Iterazioni

$$X^{(0)} = Q_J = D^{-1}B = (1, 0, 0)^T$$

$$X^{(1)} = C_J X^{(0)} + Q_J = (1, -2, -2)^T \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = 2$$

$$X^{(2)} = C_J X^{(1)} + Q_J = (-1, 2, 0)^T \quad \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = 4$$

$$X^{(3)} = C_J X^{(2)} + Q_J = (-1, 2, 0)^T \quad \|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = 0$$

Nota 1. In questo caso la soluzione è **esatta**.

Nota 2. La **velocità di convergenza** è $V_J = -\text{Log}(\rho(C_J)) = \infty$.

Convergenza per matrici A con struttura speciale

Matrici diagonalmente dominanti:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per **righe**)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per **colonne**)

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è **diagonalmente dominante** per righe o per colonne, i **metodi di Jacobi** e **Gauss-Seidel** sono entrambi **convergenti** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Per esempio, se A è **diagonalmente dominante per righe** si ha

$$\|C_J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \frac{1}{|a_{ii}|} < 1$$

Matrici (simmetriche) definite positive:

Una matrice quadrata $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** è **definita positiva** se

$$X^T A X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall X \in \mathbf{R}^n$$

Per riconoscere se una matrice è definita positiva si può usare il **criterio di Sylvester**:

Affinché una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** sia **definita positiva**, è **necessario e sufficiente** che

$$\det A_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dove A_k sono le **sottomatrici principali di testa** di A .

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è (simmetrica) **definita positiva**, il **metodo di Gauss-Seidel** è **convergente** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Esercizio 3

Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_2 + 4x_3 & = & 20 \end{cases}$$

stabilire se è possibile risolverlo usando il **metodo di Jacobi** per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Si osserva subito che A non è a diagonale dominante nè per righe nè per colonne.

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\{4, 4, 1/2\} = 4 > 1$$

$$\|C_J\|_1 = \max\{3, 9/2, 1\} = 3 > 1$$

$$\rho(C_J) = \max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2} > 1$$

infatti $\det(C_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda/2 + 12\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 25/2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 5/\sqrt{2}$ e quindi $\max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2}$.

Quindi il metodo di Jacobi **non converge**.

Tuttavia, **scambiando la prima e la seconda equazione del sistema**, si ottiene un sistema equivalente la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alla quale è associata la seguente matrice di iterazione del metodo di Jacobi

$$\hat{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|\hat{C}_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\|\hat{C}_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{5}{6} < 1$$

$$\rho(\hat{C}_J) = \max_i |\lambda_i| = 0.4257 < 1.$$

In questo caso il metodo di Jacobi **converge per ogni scelta della approssimazione iniziale.**

Inoltre, la **velocità di convergenza** del metodo è

$$-\log(\rho(\hat{C}_J)) = -\text{Log}(0.4257) = 0.3709$$

e l'errore di approssimazione si riduce di un fattore 10^{-m} all'iterazione

$$K \approx -\frac{m}{\text{Log}(\rho(\hat{C}_J))} = \frac{m}{0.3709}.$$

Esercizio 4

Data la matrice

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 4.1) determinare per quali valori del parametro reale α la matrice $A(\alpha)$ è **definita positiva**;
- 4.2) posto $\alpha = 3$, verificare quale tra i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel risulta convergente;
- 4.3) in caso di convergenza calcolare la velocità asintotica di convergenza del metodo di Jacobi;
- 4.4) in caso di convergenza, dato il vettore dei termini noti $B = [1 \ 2 \ 4]^T$, specificare per ciascun metodo la scelta dell'approssimazione iniziale .

Soluzione

4.1) La matrice A è definita positiva se è simmetrica e se $X^T A X \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3$.

La matrice A è simmetrica; per stabilire se è **definita positiva** si può usare il **criterio di Sylvester** e verificare quindi se i determinanti principali di testa sono tutti positivi:

$$\det A_1 = 4 \quad \det A_2 = 4\alpha - 1 \quad \det A_3 = 4\alpha - 5$$

Per cui A è **definita positiva** per $\alpha > \frac{5}{4}$

4.2) Per $\alpha = 3$ la matrice $A(3)$ è definita positiva, quindi il metodo di **Gauss-Seidel converge** sicuramente.

Poichè la matrice A non è diagonalmente dominante nè per righe nè per colonne, non si può trarre nessuna conclusione sulla convergenza del metodo di Jacobi analizzando solo le proprietà della matrice dei coefficienti. Per il **metodo di Jacobi** bisogna quindi studiare la **norma della matrice di iterazione**

$$C_J = -D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|C_J\|_1 = \frac{5}{4} \quad \|C_J\|_\infty = 1$$

La **condizione sufficiente** sulle norme **non è verificata**, quindi per verificare la convergenza bisogna **calcolare il raggio spettrale**, cioè il massimo dei moduli degli autovalori di C_J :

$$\det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \frac{5}{12}\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\rho(C_J) = \max\left(\sqrt{\frac{5}{12}}, 0\right) = \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0.6455 < 1$$

quindi anche il **metodo di Jacobi è convergente**.

4.3) La velocità di convergenza per Jacobi è data da

$$V_J = -\text{Log}(\rho(C_J)) \approx 0.19$$

.

4.4) La convergenza dei metodi è indipendente dalla scelta dell' approssimazione iniziale $X^{(0)} \in \mathbf{R}^3$. Una buona scelta può essere $X^{(0)} = \mathbf{0}$ per il metodo di Gauss-Seidel, del quale non è stata calcolata la matrice di iterazione, e $X^{(0)} = D^{-1}B = Q_J$ per il metodo di Jacobi.

Esercizio 5

Dato il sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 = 3 \end{cases}$$

dipendente dai parametri α e β . Stabilire per quali valori dei parametri α e β i metodi iterativi di **Jacobi** e **Gauss-Seidel** convergono sicuramente per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.

Soluzione

Condizione sufficiente perchè un metodo iterativo converga rispetto ad una norma di matrici $\|\cdot\|$ è che la norma della matrice di iterazione C sia strettamente minore di 1, cioè $\|C\| < 1$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti del sistema,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora la matrice di iterazione del metodo di Jacobi C_J è data da

$$C_J = -D^{-1}(L + U),$$

cioè

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{2}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Considerando la $\|\cdot\|_\infty$ risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{2}{|\alpha|}, \frac{3}{|\beta|}\right\} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{|\alpha|} < 1 \quad \wedge \quad \frac{3}{|\beta|} < 1,$$

cioè

$$|\alpha| > 2 \quad \wedge \quad |\beta| > 3.$$

Si osserva che alla stessa conclusione si giunge imponendo che la matrice A del sistema sia a **diagonale dominante per righe**.

Considerando, invece, la $\|\cdot\|_1$ risulta

$$\|C_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|}\right\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|\beta| + 2|\alpha|}{|\alpha||\beta|} < 1 \\ |\beta| > \frac{10}{9} \\ |\alpha| > \frac{10}{9} \end{cases}$$

da cui $\frac{10}{3} < |\beta| + 2|\alpha| < |\alpha||\beta|$.

E' opportuno notare che in questo caso non si arriva alla stessa conclusione imponendo la dominanza diagonale per colonne.

Inoltre, scegliendo $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ risulta $\|C_J\|_\infty < 1$ mentre $\|C_J\|_1 > 1$. Infatti,

$$\frac{13}{4} + 2\frac{9}{4} = \frac{31}{4} = 7.75 > \frac{9}{4} \frac{13}{4} = \frac{117}{16} \approx 7.3125.$$

In questo caso, per esempio, sono necessarie almeno

$$K = 184$$

iterazioni per ottenere un errore $\|E^{(K)}\|_\infty$ tra due approssimazioni successive inferiore a $0.5 \cdot 10^{-5}$ avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ come approssimazione iniziale.

Infatti risulta

$$\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

quando

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|_{\infty}) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty}} \right) \frac{1}{\log \|C\|_{\infty}}$$

dove $\|C\|_{\infty} = \frac{12}{13}$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$,

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \|X^{(1)}\|_{\infty} = \|Q_J\|_{\infty} = \frac{12}{13}$$

e $Q = D^{-1}B = \left[\frac{b_1}{a_{11}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} \quad \frac{b_3}{a_{33}} \right]^T = \left[\frac{2}{10} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{12}{13} \right]^T$,

con $B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T = [2 \quad 1 \quad 3]^T$ vettore dei termini noti del sistema.

Viceversa, se si pone $\alpha = 4$ e $\beta = 3$, il metodo di Jacobi non soddisfa la condizione sufficiente rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ mentre converge sicuramente rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Inoltre

$$\|E^{(K)}\|_1 < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

se

$$K > 166.03$$

avendo scelto $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

ed essendo $\|X^{(1)}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \right\|_1 = \frac{2}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$

e $\|C\|_1 = \frac{11}{12}$

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è data da

$$C_{GS} = -(L + D)^{-1}U,$$

con

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\alpha} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{10\beta} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) & -\frac{1}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10\alpha} & -\frac{9}{10\alpha} \\ 0 & -\frac{1}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} & \frac{9}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} \end{pmatrix}.$$

$$\|C_{GS}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{1}{|\alpha|}, \frac{|2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha|}{10|\alpha||\beta|}\right\} < 1$$

se

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha| < 10|\alpha||\beta| \end{cases}$$

Si osserva che $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ soddisfano la condizione precedente.

Quindi il **metodo di Gauss-Seidel sicuramente converge per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.**

Scegliendo $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$, sono necessarie

$$K = 16$$

affinchè $\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Infatti, $\|C_{GS}\|_{\infty} = \frac{4}{9}$

mentre

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_{\infty} &= \|\mathbf{X}^{(1)}\|_{\infty} = \|\mathbf{Q}_{GS}\|_{\infty} = \\ &= \|(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{B}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 16 & 404 \\ 5 & 45 & 585 \end{bmatrix}^T \right\|_{\infty} = \frac{404}{585} \end{aligned}$$

dove

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{45} & \frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{28}{585} & -\frac{16}{117} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Si osserva che il **metodo di Gauss-Seidel converge molto più velocemente del metodo di Jacobi**

Ripetere per $\|C_{GS}\|_1$.

Esempio 2

Risolvere il problema della **passeggiata casuale** con i **metodi di Jacobi** e **Gauss-Seidel**.

Soluzione

Si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2p_1 & -p_2 & & & & & & = & 1 \\ -p_1 & +2p_2 & -p_3 & & & & & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & -p_{N-3} & +2p_{N-2} & -p_{N-1} & & = & 0 \\ & & & & -p_{N-2} & +2p_{N-1} & & = & 0 \end{cases}$$

nelle incognite p_i , $i = 1, \dots, N - 1$.

La soluzione esatta è $p_i = 1 - \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$.

Per il **metodo di Jacobi** si ha:

N	$\ C_J\ _1$	$\ C_J\ _\infty$	$\rho(C_J)$	$\ X^{(50)} - X^{(49)}\ _\infty$	$\ E^{(50)}\ _\infty$	decimali esatti
11	1	1	0.9595	$0.64 \cdot 10^{-2}$	$0.77 \cdot 10^{-1}$	0
21	1	1	0.9888	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.36	0
51	1	1	0.9981	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.68	0
101	1	1	0.9995	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.81	0

Per il **metodo di Gauss-Seidel** si ha:

N	$\ C_{GS}\ _1$	$\ C_{GS}\ _\infty$	$\rho(C_{GS})$	$\ X^{(50)} - X^{(49)}\ _\infty$	$\ E^{(50)}\ _\infty$	decimali esatti
11	0.9990	0.9980	0.9206	$0.69 \cdot 10^{-3}$	$0.80 \cdot 10^{-2}$	1
21	1	1	0.9778	$0.42 \cdot 10^{-2}$	0.18	0
51	1	1	0.9962	$0.44 \cdot 10^{-2}$	0.55	0
101	1	1	0.9990	$0.44 \cdot 10^{-2}$	0.73	0

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*:

Cap. 2 §§ **2.1-2.5, 2.8-2.11**

Cap. 4 §§ **4.4-4.5**

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*:

2.19-2.25, 2.30, 7.16, 7.19, 7.35, 7.49, 7.57-7.58, 7.64