Calcolo Numerico con elementi di programmazione

(A.A. 2015-2016)

Appunti delle lezioni
sulla quadratura numerica

Integrazione numerica

Problema: approssimare **numericamente** integrali definiti

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

L'intervallo di integrazione $[a, b]$ può essere anche illimitato.

Si ricorre all'**integrazione numerica** quando:

- la primitiva di f **non** può essere espressa in **forma chiusa**, ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) = e^{-x^2}$;
- l'**espressione analitica** di $I(f)$ è **complicata** da calcolare;
- i valori di f sono noti solo in alcuni **nodi** x_i, $i = 0, \ldots, n$, ad esempio quando sono il risultato di misure sperimentali.

Soluzione: **approssimare** la funzione integranda $f(x)$ con il **polinomio interpolatore** $p_n(x)$, costruito su un insieme opportuno di **nodi** x_i, $i = 0, \ldots, n$; quindi approssimare $I(f)$ con $I(p_n)$.

Esempio

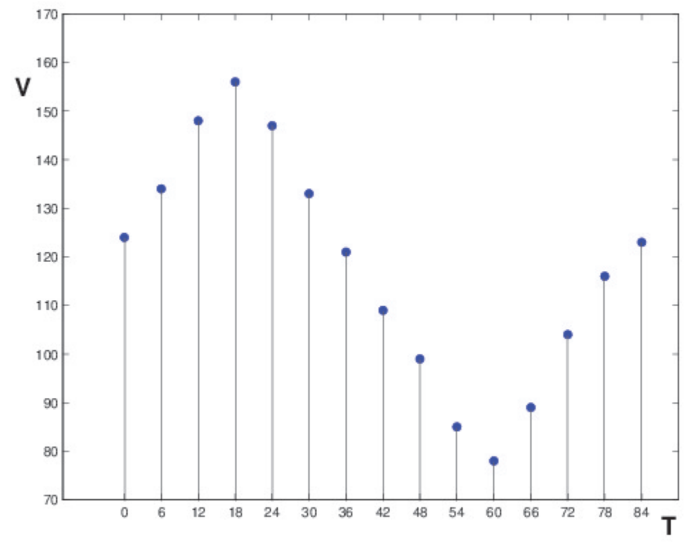
Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

T (s)	0	6	12	18	24	30	36
V (m/s)	124	134	148	156	147	133	121

T (s)	42	48	54	60	66	72	78	84
V (m/s)	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

la lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0; t_1]$ è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.



Formule di quadratura interpolatorie

Formula di interpolazione di Lagrange:

$$f(x) = p_n^*(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x) + E_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\; dx \;=\; \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x) + E_n(x) \right] \; dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)\; dx + \int_a^b E_n(x)\; dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i + R_n(f) = \underbrace{S_n(f)}_{\text{Parte approssimante}} + \underbrace{R_n(f)}_{\text{Errore di troncamento o resto}}$$

Parte approssimante

Coefficienti: $c_i = \displaystyle\int_a^b \ell_i(x)\; dx$

Errore di troncamento o resto

Se consideriamo anche gli **errori** ϵ_i sui dati si ha

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) + \varepsilon_i)\, \ell_i(x) + E_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\; dx \;= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)\; dx + \int_a^b E_n(x)\; dx + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \int_a^b \ell_i(x)\; dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i + \int_a^b E_n(x)\; dx + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, c_i = S_n(f) + R_n(f) + \underbrace{R_n^*(f)}_{\text{Errore di propagazione}}$$

$$\Rightarrow I(f) = S_n(f) + R_n(f) + R_n^*(f)$$

$$\begin{cases} S_n(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i & \textbf{Parte approssimante} \\[2ex] c_i = \displaystyle\int_a^b \ell_i(x)\; dx & \textbf{Coefficienti} \\[2ex] R_n(f) = \displaystyle\int_a^b E_n(x)\; dx = \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))\; dx & \textbf{Resto} \\[2ex] R_n^*(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, c_i & \textbf{Errore di propagazione} \end{cases}$$

Grado di precisione

L'**interpolazione** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$, quindi $E_n(x) = 0 \Rightarrow R_n(q_m) = 0$, cioè la **formula di quadratura** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$.

Definizione. Si dice che una formula di quadratura ha **grado di precisione** ν se è **esatta** per **tutti** i polinomi $q_m(x)$ di grado $m \leq \nu$, cioè $R_n(q_m) = I(q_m) - S_n(q_m) = 0$, $m \leq \nu$. In particolare, la formula di quadratura è **esatta** per i **monomi** x^k, $k = 0, 1, \ldots, \nu$.

- Una formula di quadratura **interpolatoria** a $n+1$ **nodi** ha grado di precisione **almeno** $n \geq 0$.

- il grado di precisione denota l'ordine massimo dei monomi per i quali la formula di quadratura è esatta, ossia ha resto nullo

- Le formule di quadratura **interpolatorie** sono **esatte** almeno per le funzioni **costanti**. In particolare, se si pone $f(x) = 1$, si ottiene

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} c_i = b - a}$$

Consideriamo il polinomio di grado $2n+2$

$$\mathbf{\Pi}(x) = \Big(\pi(x)\Big)^2 = (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

dove x_i, $i=0,\ldots,n$, sono i **nodi** della formula di quadratura.

- $I(\mathbf{\Pi}) = \int_a^b \mathbf{\Pi}(x)\ dx > 0$

- $I(\mathbf{\Pi}) = S_n(\mathbf{\Pi}) + R_n(\mathbf{\Pi}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\mathbf{\Pi}(x_i)}_{=0} + R_n(\mathbf{\Pi}) = R_n(\mathbf{\Pi})$

$\Rightarrow$ $R_n(\mathbf{\Pi}) > 0$: esiste **almeno un polinomio** di grado $2n+2$ per il quale le formule di quadratura interpolatorie **non** sono **esatte**, quindi $\nu < 2n+2$.

$\Rightarrow$ Per le **formule interpolatorie** si ha

$$\boxed{n \leq \nu \leq \ 2n+1} \qquad\qquad n \geq 0$$

Scelta dei nodi nelle formule interpolatorie

Differenti **distribuzioni di nodi** danno origine a differenti formule di quadratura con diverso grado di precisione.

- **Formule di Newton-Cotes**

  Nodi equispaziati: $x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, n \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

  Grado di precisione: $\begin{cases} \nu = n, & n+1 \ \ \textbf{pari} \\ \nu = n+1, & n+1 \ \ \textbf{dispari} \end{cases}$

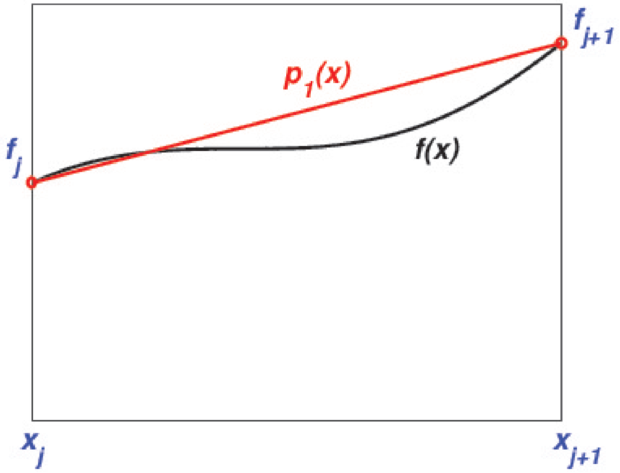
- **Formule gaussiane**

  Nodi gaussiani: **zeri** di polinomi ortogonali, ad esempio i **nodi di Chebyshev**; non sono equispaziati e sono interni all'intervallo $[a, b]$.

  Grado di precisione: $\nu = 2n + 1$ (massimo)

Formula del trapezio

$$n+1=2,\ \nu=1,\ f\in C^2[a,b]$$



Si approssima $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado 1 che passa per i punti:

$$(x_0,f_0),(x_1,f_1)$$
$$x_0\equiv a,\ x_1\equiv b$$

$$f(x) = f_0\ell_0(x)+f_1\ell_1(x)+\frac{\pi_1(x)}{2!}f''(\xi(x)) =$$

$$= f_0\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}+f_1\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}+\frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)f''(\xi(x))$$

Parte approssimante:

$$
\begin{aligned}
S_1(f) &= f_0 \int_a^b \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\,dx + f_1 \int_a^b \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\,dx = \\
&= \frac{1}{2} f_0 (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} f_1 (x_1 - x_0) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)(b - a) = \\
&= \frac{1}{2}(f_0 + f_1) h
\end{aligned}
$$

Resto:

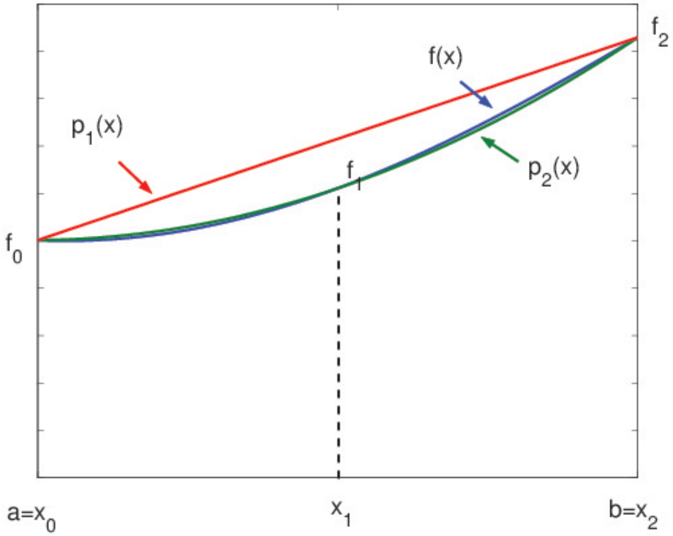
$$
R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x))\ dx \underbrace{=}_{\downarrow} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau) \qquad \tau \in [a, b]
$$

Teorema
della media

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n + 1 = 3, \ \nu = 3, \ f \in C^4[a, b]$$

Si approssima $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$.



Parte approssimante: $S_2(f) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

Resto: $R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a, b]$

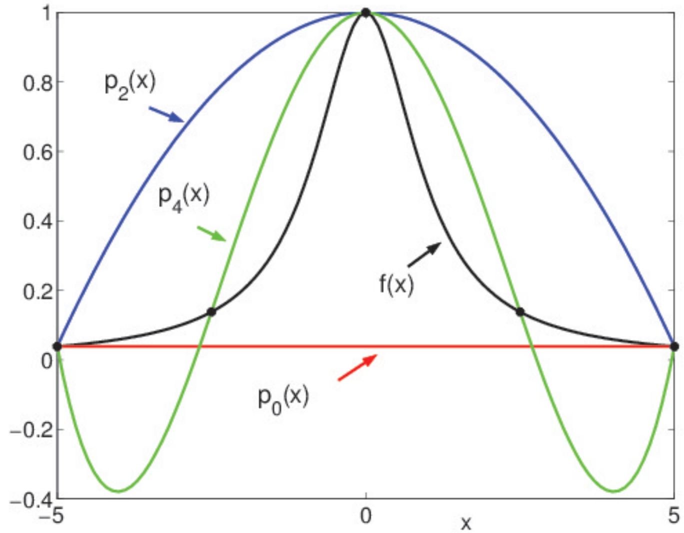
Convergenza delle formule di quadratura

Convergenza: $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f) \iff \lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0}$

• Al **crescere di** n il polinomio interpolatore potrebbe non convergere
$\Rightarrow$ anche la formula di quadratura potrebbe fornire **risultati inaccurati**.

Fenomeno di Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [-5,5]$$



$\Rightarrow$ Le formule di quadratura interpolatorie **convergono** in tutti quei casi in cui **converge il polinomio interpolatore**.

Teorema. Sia $f \in C[a,b]$, $[a,b]$ limitato, sia $\{S_n(f)\}$ una **successione** di **formule di quadratura interpolatorie**

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, f(x_i) \quad \text{tale che} \quad \sum_{i=0}^{n} |c_i| \le M \qquad \forall n,$$

allora $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f)$.

Nota 1. Per le formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** si ha

$$\sum_{i=0}^{n} |c_i| = \sum_{i=0}^{n} c_i = b - a$$

per cui l'ipotesi del **Teorema** è soddisfatta con $M = b - a$.

$$\Downarrow$$

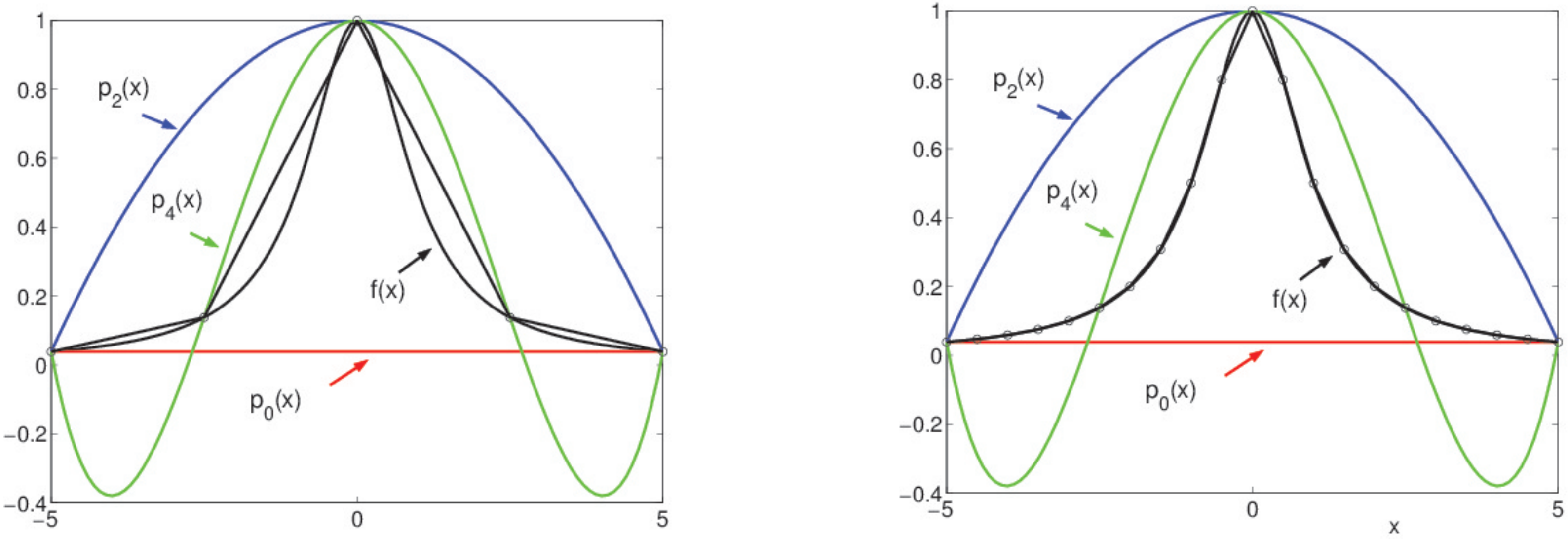
Ogni **successione** di formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** è **convergente**.

Nota 2. I coefficienti delle **formule di Newton-Cotes** sono **tutti positivi** se $n \le 7$, mentre sono sia **positivi** che **negativi** per $n > 7$. I coefficienti delle **formule gaussiane** sono **tutti positivi** per ogni valore di n.

Formule di Newton-Cotes generalizzate

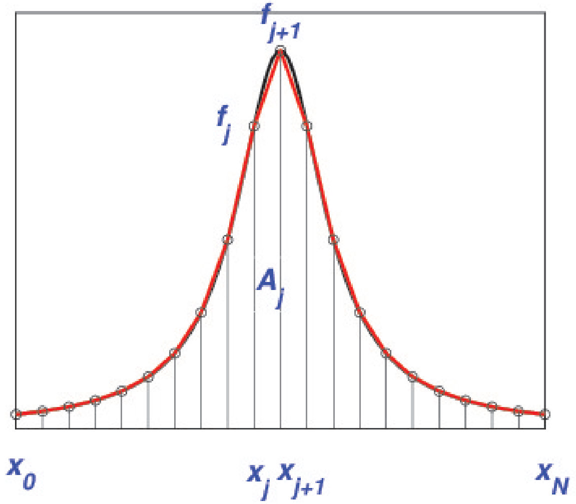
- Per $n > 7$ i coefficienti c_i delle formule di Newton-Cotes hanno segni sia **positivi** che **negativi** $\rightarrow$ oltre a non essere garantita la convergenza, si può avere un'**amplificazione** degli errori sui dati, e quindi un'**instabilità numerica**.

- Per evitare l'uso di formule di Newton-Cotes di **grado elevato**, quando si dispone di un numero **elevato** di dati $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, si divide l'intervallo di integrazione in N **sottointervalli** e si utilizza in ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes di **grado basso** (in genere di grado 1 o 2).



Formula dei trapezi

L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree dei **trapezi** A_j.



In ogni **sottointervallo** $[x_j, x_j{+}1]$, $j = 0, \ldots, N{-}1$, si applica la **formula del trapezio** con $h = \dfrac{b-a}{N}$.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(-\frac{h^3}{12}\right) f''(\tau_j) \qquad \tau_j \in [x_j, x_j + 1]$$

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(-\frac{h^3}{12}\right) f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2}(f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{N-2} + f_{N-2} + f_{N-1} + f_N) - \left(\frac{h^3}{12}\right) \sum_{j=0}^{N-1} f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N\right) - \left(\frac{h^3}{12}\right) N f''(\tau) \qquad \tau \in [a,b]
\end{aligned}
$$

Formula dei trapezi:
$$
\begin{cases}
T_N(f) = \dfrac{h}{2}\left(f_0 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N\right) \\[2ex]
R_N^T(f) = -\left(\dfrac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \qquad \tau \in [a,b]
\end{cases}
$$

Grado di precisione: $\nu = 1$

Formula delle parabole

In ogni **sottointervallo** $[x_{2j}, x_{2(j+1)}]$, $j = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$, si applica la **formula di Cavalieri-Simpson** con $h = \frac{b-a}{N}$.

$$I(f) \;= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int x_{2j} x_{2(j+1)} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} \left(f_{2j} + 4 f_{2j+1} + f_{2(j+1)} \right) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\tau_j)$$

$$\tau_j \in [x_j, x_j + 1]$$

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x)\,dx = \\
&= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3}\left(f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}\right) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 + \cdots + f_{N-2} + f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N) - \\
&- \left(\frac{h^5}{90}\right) \sum_{j=0}^{N/2-1} f^{(4)}(\tau_j) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N\right) - \left(\frac{h^5}{90}\right)\frac{N}{2} f^{(4)}(\tau)
\end{aligned}
$$

Formula delle parabole:

$$
\begin{cases}
P_N(f) = \dfrac{h}{3}\left(f_0 + 4\displaystyle\sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N\right) \\[2ex]
R_N^P(f) = -\left(\dfrac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a,b]
\end{cases}
$$

Grado di precisione: $\nu = 3$

Nota. Per poter usare la formula delle parabole il **numero di nodi** $N+1$ deve essere **dispari**.

Convergenza delle formule dei trapezi e delle parabole

Formula dei trapezi:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} T_N(f) = I(f) \iff \lim_{N\to\infty} R_N^T(f) = 0}$$

Se $f \in C^{(2)}[a,b]$

$$\lim_{N\to\infty} R_N^T(f) \underbrace{=}_{h=\frac{b-a}{N}} \lim_{h\to 0} R_N^T(f) = \lim_{h\to 0} -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2\, f''(\tau) = 0$$

Formula delle parabole:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P_N(f) = I(f) \iff \lim_{N\to\infty} R_N^P(f) = 0}$$

Se $f \in C^{(4)}[a,b]$

$$\lim_{N\to\infty} R_N^P(f) \underbrace{=}_{h=\frac{b-a}{N}} \lim_{h\to 0} R_N^P(f) = \lim_{h\to 0} -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4\, f^{(4)}(\tau) = 0$$

Esempio

Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_i	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v_i	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

Traccia della soluzione.
La lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$. Quindi si può approssimare la lunghezza della pista con una **formula di quadratura generalizzata**.

Formula dei trapezi: $L \approx 3\left(v_0 + 2\sum_{i=1}^{13} v_i + v_{14}\right) = 9855$

Formula delle parabole: $L \approx 2\left(v_0 + 4\sum_{i=0}^{6} v_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{6} v_{2i} + v_{15}\right) = 9858$

Esempio: errore di propagazione

Assumendo che per l'**errore sui dati** valga la limitazione $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon = 0.5$, per l'**errore di propagazione** si ottiene la maggiorazione:

$$|R_n^*(f)| = |\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \, c_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i| \, |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |c_i|$$

Poiché entrambe le formule di quadratura hanno **coefficienti c_i positivi** si ha

$$|R_n^*(f)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} c_i = \varepsilon \, (b-a) = 0.5 \cdot 84 = 42$$

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 7 §§ **7.1, 7.2, 7.3 (escluse formule di Newton-Cotes aperte), 7.4**

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*: **4.9, 4.10, 7.3, 7.17, 7.23, 7.47, 7.48, 7.82**