

# Programma del Corso di Geometria

a.a. 2017–2018

Corso di laurea Ingegneria Clinica, II Canale

## Matrici e Sistemi lineari

Matrici. Operazioni sulle matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne di due matrici. Proprietà delle operazioni sulle matrici. Matrici scalari, matrici diagonali, matrici triangolari. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Sistemi lineari. Sistemi di equazioni lineari. Sistemi equivalenti. Operazioni elementari sui sistemi lineari. Il metodo di eliminazione di Gauss. Sistemi lineari omogenei. Forma matriciale di un sistema: matrice dei coefficienti e matrice completa. Operazioni elementari sulle righe di una matrice, matrici a scalini. Determinante di una matrice quadrata. Teorema di Laplace. Teorema di Binet. Matrici invertibili. Matrice aggiunta, Calcolo della matrice inversa. Teorema di Cramer. Rango di una matrice. Rango per minori. Teorema degli orlati. Il Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi lineari dipendenti da parametri.

## Spazi Vettoriali Reali

Definizione di spazio vettoriale reale. Spazi vettoriali di matrici e polinomi. Lo spazio vettoriale numerico  $\mathbb{R}^n$ . Dipendenza e indipendenza lineare di vettori: insiemi liberi e generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Basi e dimensione. Teorema di esistenza di una base. Teorema di Completamento a base. Coordinate di un vettore rispetto a una base.

## Sottospazi vettoriali

Sottospazi generati da un insieme di vettori. Somma e intersezione di sottospazi. Somma diretta e sottospazi complementari. Formula di Grassmann. Dimensione di un sottospazio e rango.

## Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

Nucleo e immagine. Omomorfismi iniettivi, omomorfismi suriettivi, isomorfismi. Omomorfismi assegnati su una base. Matrice associata ad un omomorfismo. Matrice del cambiamento di base. Teorema della dimensione. Endomorfismi di uno spazio vettoriale.

Matrice associata ad un endomorfismo rispetto ad una base. Matrici simili. Autovettori e autovalori e autospazi di un endomorfismo. Il polinomio caratteristico di una matrice e di un endomorfismo. Autospazi e loro dimensioni. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Basi di autovettori. Criteri di diagonalizzabilità. Procedimento di diagonalizzazione.

### **Spazi Vettoriali Euclidei**

Definizione di prodotto scalare standard. Norma di un vettore. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Basi ortogonali. Basi ortonormali e algoritmo di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali e loro proprietà. Il complemento ortogonale di un sottospazio. Endomorfismi simmetrici. Il teorema spettrale. Diagonalizzazione di endomorfismi simmetrici. Diagonalizzazione di matrici simmetriche.

### **Geometria analitica del piano e dello spazio**

Spazi vettoriali geometrici e loro dimensione. Indipendenza di punti nel piano e nello spazio ordinario: allineamento e complanarità. Sistemi di riferimento. Equazioni cartesiane di rette (del piano e dello spazio ordinario) e di piani (dello spazio ordinario). Reciproca posizione tra rette, piani, rette e piani. Condizioni di parallelismo. Rette sghembe.

### **Geometria analitica euclidea**

Ortogonalità negli spazi vettoriali geometrici: prodotto scalare e prodotto vettoriale. Condizioni di perpendicolarità tra rette, piani, rette e piani. Distanza tra punti, tra punti e rette, tra punti e piani, tra rette e rette, tra rette e piani e tra piani e piani. Circonferenze e sfere.

### **Trasformazioni del piano e isometrie**

Traslazioni, rotazioni e riflessioni. Formule del cambiamento di coordinate. Forme quadratiche e loro diagonalizzazione.

### **Coniche**

Ellisse, iperbole, parabola e loro equazioni canoniche. Coniche. Matrici di una conica. Teorema di invarianza, teorema di riduzione. Riduzione a forma canonica e classificazione.

### **Testo di supporto**

A. Savo: Appunti del Corso di Geometria (in 12 parti) (disponibile in rete).

## **Avvertenza**

La presentazione degli spazi vettoriali geometrici, su cui si fonda la presentazione della geometria analitica data nel corso, può essere indifferentemente studiata sul Compendiucolo o sulle corrispondenti parti del testo di riferimento.

La dimostrazione del **Lemma** della **Sezione 8** della **Parte 4** (a pagina 17) e le intere **Sezioni 5 e 6** della **Parte 12b** sono considerate facoltative.