Breve compendio di geometria analitica

Nicola Apollonio*

1 n-spazi nello spazio ordinario

Vi sono delle proprietà comuni condivise dagli enti geometrici fondamentali che possono essere trattate unitariamente. E' anche possibile "astrarre" queste proprietà in modo che gli enti geometrici dello spazio ordinario siano solo alcuni degli esempi di oggetti che le godono. Questo è sostanzialmente il punto di vista della *geometria affine* il cui approccio consiste nel dare gli assiomi[1] *spazio affine* e nel dedurre proprietà generali da tali assiomi attraverso l'algebra lineare. Le proprietà degli enti geometrici fondamentali dello spazio ordinario si ottengono quindi come caso particolare dopo aver verificato che tali enti sono appunto esempi di *spazi affini.* Noi non adotteremo questo punto di vista limitandoci a studiare il caso concreto degli enti geometrici fondamentali dello spazio ordinario. Tuttavia, ove possibile, nello stesso spirito della geometria affine, utilizzeremo informalmente la nozione di "spazio" (tacendo che si tratta di spazio affine) per presentare i risultati fondamentali in forma ragionevolmente unitaria.

Sia $\mathbb{A}$ un sottoinsieme di punti dello spazio ordinario. Diremo che $\mathbb{A}$ è

-1-spazio se $\mathbb{A} = \emptyset$;

0-spazio se $\mathbb{A}$ consiste di un singolo punto;

1-spazio se $\mathbb{A}$ è l'insieme dei punti di una retta dello spazio ordinario;

2-spazio se $\mathbb{A}$ è l'insieme dei punti di un piano dello spazio ordinario;

3-spazio se $\mathbb{A}$ è l'insieme dei punti dell'intero spazio ordinario;

Se $n \geq 1$ Ogni n-spazio contiene dunque infiniti h-spazi per ogni h tale che $0 \leq h \leq n-1$.

2 Vettori geometrici

Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio, $n \in \{-1, 0, \ldots, 3\}$. Un segmento orientato di $\mathbb{A}$ è una coppia ordinata (Q, P) di punti (non necessariamente distinti) di $\mathbb{A}$. I punti Q e P sono, rispettivamente, l'estremo iniziale e finale del segmento. Il segmento (Q, P) si rappresenta con una freccia da Q a P. Due segmenti orientati (Q, P) e (Q', P') di $\mathbb{A}$ sono equipollenti se QP e $Q'P'$ sono i lati opposti di un parallelogramma (eventualmente vuoto o degenere) i cui altri due lati sono QQ' e PP'. Conseguentemente due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se

*Istituto per le Applicazioni del Calcolo, M. Picone, Via dei Taurini, 19, 00185 Rome, Italy. nicola.apollonio@cnr.it

[1] Il lettore interessato che volesse approfondire, rintraccerà in **A1** e **A2** tali assiomi, salvo pensare $\mathbb{A}$ e $V(\mathbb{A})$ come astratti.

- i rispettivi estremi giacciono su rette parallele di $\mathbb{A}$;

- i segmenti hanno la stessa lunghezza (rispetto ad una fissata un'unità di misura);

- hanno lo stesso verso.

L'insieme dei vettori geometrici $\mathbb{A}$ sarà denotato con $V(\mathbb{A})$ mentre i vettori geometrici saranno denotati con le lettere minuscole latine sormontate da una freccia: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \ldots$. Ogni vettore geometrico $\overrightarrow{v}$ è dunque rappresentato da un particolare vettore orientato (Q, P) ed ogni segmento orientato (Q', P') equipollente a (Q, P) può essere scelto come rappresentante di $\overrightarrow{v}$. Denoteremo con $\overrightarrow{QP}$ il vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato (Q, P). La lunghezza del vettore geometrico $\overrightarrow{v}$ è, per definizione, la lunghezza di uno qualsiasi (e quindi di ognuno) dei segmenti orientati che lo rappresenta. Essa si denota con il simbolo $|\overrightarrow{v}|$. La *direzione* di $\overrightarrow{v}$ è, per definizione, la direzione di uno qualsiasi (e quindi di ognuno) dei segmenti orientati che lo rappresenta e il *verso* di $\overrightarrow{v}$ è, per definizione, verso di uno qualsiasi (e quindi di ognuno) dei segmenti orientati che lo rappresenta.

L'operazione di rappresentare un vettore geometrico $\overrightarrow{v}$ mediante la scelta di un segmento orientato (Q, P) nella sua classe di equipollenza si può pensare più plasticamente come l'operazione di applicare il vettore geometrico $\overrightarrow{v}$ in Q. Conseguentemente resta univocamente determinato il punto P estremo finale del segmento orientato che rappresenta $\overrightarrow{v}$. Pertanto, esplicitamente:

[A1] *Comunque scelto un punto $Q \in \mathbb{A}$ e un vettore $\overrightarrow{v} \in V(\mathbb{A})$, esiste un solo punto $P \in \mathbb{A}$ tale che $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$*

sicché (formalmente) ha senso denotare con $Q + \overrightarrow{v}$ l'unico punto P tale che $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Inoltre (sempre formalmente)

$$\text{se } P = Q + \overrightarrow{v} \text{ allora } P = Q + \overrightarrow{QP} \text{ e, ancora formalmente, } P - Q = \overrightarrow{QP}. \tag{1}$$

Si osservi tuttavia che il simbolo di somma che appare nella notazione anzidetta si intende come una applicazione da $\mathbb{A} \times V(\mathbb{A})$ in $\mathbb{A}$ mentre il simbolo di differenza si deve intendere come un'applicazione da $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ in $V(\mathbb{A})$.

Si osservi ancora che per la definizione stessa di equipollenza accade che

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q'P'} \text{ se e solo se } \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'}. \tag{2}$$

3 Struttura di spazio vettoriale dei vettori geometrici

Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio, $n \in \{-1, \ldots, 3\}$ e sia $V(\mathbb{A})$ il corrispondente insieme di vettori geometrici. Introduciamo ora un operazione di somma in $V(\mathbb{A})$ e una moltiplicazione di numeri reali per vettori geometrici in modo che $V(\mathbb{A})$ risulti uno spazio vettoriale reale. Denotiamo con $\overrightarrow{0}$ la classe di equipollenza di tutti i segmenti orientati (Q, Q) al variare di $Q \in \mathbb{A}$. Il vettore $\overrightarrow{0}$ è detto *vettore nullo di* $V(\mathbb{A})$.

Definizione 1 (SOMMA DI VETTORI GEOMETRICI)**.** *Siano $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ due vettori geometrici di $V(\mathbb{A})$. Si applichi $\overrightarrow{u}$ in un qualsiasi punto A di $\mathbb{A}$ e sia B tale che $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Si applichi $\overrightarrow{v}$ nel punto B di $\mathbb{A}$ e sia C tale che $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Il* vettore somma *$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ è il vettore $\overrightarrow{w}$ tale che $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$.*

Si osservi che in realtà, stante la nozione di equipollenza, la regola data sopra è la stessa regola nota come quella del parallelogramma quando i vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ siano applicati nello stesso punto: se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB'}$ basta applicare la definizione ai rappresentanti (A, B) e (B, C) dove (B, C) è equipollente ad (A, B'). Questa argomentazione dimostra anche la commutatività della somma. L'associatività si dimostra lungo le stesse linee. Infine, è evidente dalla definizione che:

- il vettore nullo è l'elemento neutro della somma: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
- esiste l'opposto di ogni $\overrightarrow{v} \in V(\mathbb{A})$: l'opposto del vettore $\overrightarrow{v}$ rappresentato per esempio dal segmento (A, B) è il vettore geometrico $\overrightarrow{w}$ rappresentato dal segmento (B, A). Si indica questo fatto scrivendo $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{v}$.

Osserviamo che la definizione stessa di addizione tra vettori geometrici implica che:

[A2] *Comunque scelti tre punti Q, P ed $R \in \mathbb{A}$, risulta:* $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR}$.

Definizione 2 (Moltiplicazione per uno scalare)**.** *Sia $\overrightarrow{v} \in va$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Il prodotto del vettore $\overrightarrow{v}$ per lo scalare a è il vettore denotato con $a\overrightarrow{v}$ definito come segue:*

- *se $a = 0$ oppure $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ allora $a\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;*
- *se $a > 0$ allora $a\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ è il vettore geometrico che ha stessa direzione e verso di $\overrightarrow{v}$ ma lunghezza pari ad $a|\overrightarrow{v}|$;*
- *se $a < 0$ allora $a\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ è il vettore geometrico che ha stessa direzione $\overrightarrow{v}$, lunghezza pari ad $a|\overrightarrow{v}|$ e verso opposto a quello di $\overrightarrow{v}$.*

Si noti che dalla definizione di moltiplicazione per uno scalare segue, in particolare, che $(-1)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$. E' facile (benché noioso) verificare che la moltiplicazione è compatibile con la somma di vettori ed il prodotto per scalari, sicché resta provato il seguente risultato.

Teorema 1. *Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio, $n \in \{-1, \dots, 3\}$ e sia $V(\mathbb{A})$ il corrispondente insieme di vettori geometrici. Con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare appena introdotte $V(\mathbb{A})$ è uno spazio vettoriale reale.*

Dell'importante Teorema che segue omettiamo la dimostrazione per la quale rinviamo alle dispense del corso o ai testi consigliati.

Teorema 2. *Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio, $n \in \{-1, \dots, 3\}$ e sia $V(\mathbb{A})$ il corrispondente spazio vettoriale. La dimensione di $V(\mathbb{A})$ è n.*

3.1 Prodotto scalare e Struttura Euclidea dello spazio dei vettori geometrici

Sia (O, Q) ed (O, P) due segmenti orientati (non nulli e non paralleli)in un n-spazio $\mathbb{A}$. Si definisce angolo in O tra i due segmenti orientati (O, Q) ed (O, P) come l'angolo (convesso e non orientato) del triangolo POQ.

Definizione 3 (angolo tra vettori geometrici)**.** *Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio e siano $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ due vettori linearmente indipendenti di $V(\mathbb{A})$. L'angolo tra $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ è l'angolo formato tra due loro rappresentanti applicati nello stesso punto. Tale angolo si denota con $\widehat{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}}$.*

Mediante tale nozione di angolo appena introdotta è possibile dotare $V(\mathbb{A})$ di un prodotto scalare definito positivo. Ricordiamo che un prodotto scalare definito positivo in uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un'applicazione bilineare simmetrica $< \cdot, \cdot >: \mathbf{V} \times \mathbf{V} :\to \mathbb{R}$ tale che $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >$ è positivo per ogni $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ con un prodotto scalare definito positivo è detto *spazio vettoriale Euclideo.*

Teorema 3. *Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio. L'applicazione $< \cdot, \cdot >: V(\mathbb{A}) \times V(\mathbb{A}) :\to \mathbb{R}$ definita da $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >= \cos \widehat{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}} |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|$ è un prodotto scalare definito positivo. Pertanto $V(\mathbb{A})$ è uno spazio vettoriale euclideo.*

Dimostrazione . Data nelle dispense del corso. $\square$

Quando lo spazio vettoriale dei vettori geometrici $V(\mathbb{A})$ corrispondente all'n-spazio $\mathbb{A}$ è pensato come euclideo, si dice che $\mathbb{A}$ è un *n-spazio euclideo.*

4 m-piani in n-spazi.

Nello stesso modo in cui gli spazi vettoriali contengono sottoinsiemi che sono essi stessi spazi vettoriali (relativamente alle stesse operazioni introdotte nello spazio vettoriale), gli n-spazi contengono essi stessi m-spazi con $m \leq n$. Per distinguerli dall'n-spazio ambiente ci riferiamo ad essi come agli m-piani dell'n-spazio $\mathbb{A}$.

Definizione 4 (m-piano)**.** *Sia $\mathbb{A}$ un n-spazio, Q un suo punto e W un sottospazio m-dimensionale di $V(\mathbb{A})$. L'insieme*

$$S = \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W \right\}$$

è detto m-piano passante per Q *e* parallelo *a W. Ogni vettore $\overrightarrow{w} \in W$ pure si dice* parallelo *ad S. Lo spazio vettoriale W si dice* direzione *di S.*

Dalla definizione segue che un m-piano S passante per un punto $Q \in \mathbb{A}$ e parallelo al sottospazio W di $V(\mathbb{A})$ è l'insieme dei punti che sono estremi finali dei vettori di W applicati in Q. Pertanto, ricordando la notazione utilizzata per gli estremi finali di vettori applicati, abbiamo la seguente suggestiva rappresentazione per S:

$$S = \{Q + \overrightarrow{w} |\ \overrightarrow{w} \in W\} \tag{3}$$

Facciamo vedere che ogni m-piano, così come l'abbiamo definito, soddisfa gli assiomi **[A1]** e **[A2]** che sono soddisfatti dagli n-spazi e che inoltre ogni m-piano è univocamente determinato da uno qualsiasi dei suoi punti e dalla sua direzione.

Teorema 4. *Sia S un m-piano passante per Q e parallelo a W. Allora*

(a) *comunque scelti due punti A e B di S, il vettore $\overrightarrow{AB}$ è in W sicché, in particolare, S è parallelo ad $\overrightarrow{AB}$;*
(b) *comunque scelto un punto A in S ed un vettore $\overrightarrow{w} \in W$, il punto $A + \overrightarrow{w}$ è esso pure in S.*

Dimostrazione . Siano A ed B due punti di S dove

$$S = \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W \right\} = \left\{ Q + \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{w} \in W \right\}.$$

Siccome $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}$ perché **[A2]** vale per $\mathbb{A}$, allora $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$. Ora $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ sono vettori di W perché $A = Q + \overrightarrow{u}$ e $B = Q + \overrightarrow{v}$ per certi due vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ di W. Sicché $\overrightarrow{AB} \in W$ essendo combinazione lineare di vettori di W. Questo dimostra (a). Dimostriamo la (b). Sia $B = A + \overrightarrow{w}$ dove A è arbitrariamente scelto in S e $\overrightarrow{w}$ è arbitrariamente scelto in W. Allora $\overrightarrow{AB} \in W$ e dunque $\overrightarrow{QB} \in W$ perché da $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB}$ segue che $\overrightarrow{QB}$ è somma di vettori di W. Ma allora B è in S essendo l'estremo finale di un vettore di W applicato in Q. □

In altre parole ogni m-piano soddisfa gli stessi assiomi **[A1]** e **[A2]** che sono soddisfatti dagli n-spazi ed è esso stesso m-spazio. In particolare:

-1-piano di $\mathbb{A}$ è l'insieme vuoto;

0-piano di $\mathbb{A}$ è un singolo punto di $\mathbb{A}$;

1-piano di $\mathbb{A}$ è una retta di $\mathbb{A}$;

2-piano di $\mathbb{A}$ è un piano[2] di $\mathbb{A}$;

3-piano di $\mathbb{A}$ è $\mathbb{A}$ stesso.

Teorema 5 (m-piano noto un punto e la direzione)**.** *Comunque assegnati un punto $Q \in \mathbb{A}$ e un sottospazio m-dimensionale W di $V(\mathbb{A})$, esiste un unico m-piano S passante per Q e parallelo a W. Un siffatto m-spazio è dato nella Definizione 4. Pertanto un m-piano è univocamente individuato da uno qualsiasi dei suoi punti e dalla sua direzione.*

Dimostrazione . Sia T un altro m-piano passante per Q e parallelo a W. Facciamo vedere che $T \subseteq S$ prendendo un punto $P \in T$ e mostrando che esso appartiene ad S. Siccome $Q \in T$ (si ricordi che T passa per Q) allora Q e P sono due punti di T pertanto $\overrightarrow{QP} \in W$ per la (a) del Teorema 4. Ma allora, per la definizione stessa di S, $P \in S$ essendo P l'estremo finale di un vettore applicato in Q. Facciamo vedere che $S \subseteq T$ prendendo un punto di $P \in S$ e mostrando che esso appartiene a T. Siccome P è in S esso è l'estremo finale del vettore $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QP}$ di W applicato in Q. Pertanto, $P = Q + \overrightarrow{QP}$. Ma $Q \in T$ (perché T passa per Q) sicché, per la (b) del Teorema 4, $P \in T$. Ciò prova che $S \subseteq T$ e dunque $S = T$. □

In virtù del Teorema 5, i punti P di un m-piano S passante per P_0 e parallelo a W possono esprimersi come estremi finali di vettori di W applicati in P_0. Pertanto i punti P di S sono tutti e soli i punti di $\mathbb{A}$ della forma

$$P = P_0 + t_1\overrightarrow{w_1} + \cdots + t_m\overrightarrow{w_m} \tag{4}$$

dove $\{\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_m}\}$ è una base di W, e $t_1, \ldots, t_m$ sono numeri reali (questi ultimi sono evidentemente le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_0P}$ rispetto alla base scelta in W). Al variare di $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, la (4), descrive tutti e soli i punti di $\mathbb{A}$ che sono in S e pertanto prende il nome di equazione parametrica di S.

[2] In trattazioni più generali un m-piano di un n-spazio con $m = n - 1$ è detto *iperpiano* sicché i piani dello spazio ordinario sono appunto iperpiani in tale spazio.

Esempio 1. *Per definizione il piano ordinario (uno dei piani dello spazio ordinario) è un 2-spazio. Denotiamolo con $\mathbb{A}_2$. Lo spazio vettoriale $V(\mathbb{A}_2)$ ha dimensione 2. Pertanto i possibili m-piani (non banali) si ottengono per $m = 1$ e sono dunque le rette del piano. Esse si descrivono, per esempio, mediante la (4) con $m = 1$ una volta noto un punto P_0 che vi appartiene. Denotiamo con $\mathbb{A}_3$ lo spazio ordinario. Pertanto i possibili m-piani (non banali) si ottengono per $m = 1$ oppure $m = 2$. Nel primo caso si tratta di rette nello spazio ordinario mentre nel secondo caso si tratta di piani nello spazio ordinario. Ciascuno dei due tipi m-piani si descrive ancora mediante le equazioni parametriche.*

Siano dati $m + 1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$ in un n-spazio $\mathbb{A}$, $m \leq n$, sia $W(P_0, \ldots, P_1)$ il sottospazio di $V(\mathbb{A})$ generato dai vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}$ e sia h la sua dimensione. Chiaramente $h \leq m$. L'h-piano

$$S(P_0, \ldots, P_1) = \{P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{w} \in W(P_0, \ldots, P_1)\}$$

contiene tutti gli $m+1$ punti dati e se, per qualche intero positivo k, S' è un k-piano che pure contiene tutti i punti dati ed $S(P_0, \ldots, P_1) \neq S'$, allora $h < k$.

Definizione 5 (Dipendenza in $\mathbb{A}$). *Dati $m + 1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_m$ in un n-spazio $\mathbb{A}$, diciamo che essi sono* indipendenti *se non esiste alcun h-piano che li contiene tutti con $h < m$. Punti che non sono indipendenti*[3] *saranno detti* dipendenti.

Esempio 2. *A norma della* Definizione 5, *$m+1$ punti in $\mathbb{A}$ sono dipendenti se sono contenuti in un h-piano con $h < m$. Pertanto*

Se $m = 0$**, allora** $m + 1 = 1$ *e un solo punto è sempre indipendente in $\mathbb{A}$ perché non può essere contenuto in alcun -1-piano essendo quest'ultimo l'insieme vuoto.*

Se $m = 1$**, allora** $m + 1 = 2$ *e due punti sono dipendenti solo se esiste un h-piano con $h < 1$ che li contenga entrambi. Siccome $h > -1$, per quanto stabilito al punto precedente, necessariamente $h = 0$. Ora i 0-piani di $\mathbb{A}$ sono gli insiemi costituiti da un solo punto. Sicché due punti sono dipendenti solo se coincidono.*

Se $m = 2$**, allora** $m + 1 = 3$ *e tre punti sono dipendenti, per quanto visto sopra, se sono contenuti in un 1-piano, cioè una retta (in particolare, se coincidono). In questo caso si dice che i tre punti sono* allineati.

Se $m = 3$**, allora** $m + 1 = 4$ *e quattro punti sono dipendenti, se sono tutti contenuti in un 2-piano, cioè un piano (in particolare, se sono tutti e quattro allineati). In questo caso si dice che i quattro punti sono* complanari.

Chiaramente

$$\begin{gathered}\text{gli } m+1 \text{ punti } P_0, P_1, \ldots, P_m \text{ di } \mathbb{A} \text{ sono indipendenti} \\ \Updownarrow \\ \text{i vettori } \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \ldots, \overrightarrow{P_0P_m} \text{ di } V(\mathbb{A}) \text{ sono linearmente indipendenti.}\end{gathered} \tag{5}$$

La nozione di indipendenza di punti di $\mathbb{A}$ appena introdotta ci permette di stabilire un ulteriore criterio (oltre il Teorema 5) per individuare m-piani di $\mathbb{A}$.

[3] Si dice anche che i punti sono *affinemente indipendenti* oppure in *posizione generale*.

Teorema 6 (m-piano NOTI $m+1$ PUNTI INDIPENDENTI)**.** *Comunque assegnati $m+1$ punti indipendenti in $\mathbb{A}$ esiste un unico m-piano che li contiene tutti. Pertanto ogni m-piano S è univocamente determinato da $m+1$ dei suoi punti indipendenti. Se $P_0, P_1, \dots, P_m$ sono tali punti, allora, esplicitamente:*

$$S = S(P_0, \dots, P_1) = \left\{ P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + t_2\overrightarrow{P_0P_2} + \cdots + t_m\overrightarrow{P_0P_m} \right\}.$$

Dimostrazione . Siano $P_0, P_1, \dots, P_m$, $m+1$ punti indipendenti di $\mathbb{A}$. Abbiamo già osservato che $S(P_0, \dots, P_1)$ è un m-piano che li contiene tutti e, per definizione di indipendenza, se $h < m$ non esiste alcun h-piano che li contenga tutti. Pertanto, se T è un k-piano che contiene $P_0, P_1, \dots, P_m$, deve risultare $k \geq m$. Sia W' la direzione di T. Per il Teorema 4, $\overrightarrow{P_0P_i} \in W'$ per $i = 1, \dots, m$. Pertanto $W(P_0, \dots, P_1) \subseteq W'$. Se $k > m$, allora T non è un m-piano e se $k = m$ allora $W(P_0, \dots, P_1) = W'$ sicché $S(P_0, \dots, P_1) = T$ per il Teorema 5. Resta provata dunque l'unicità e da questa segue la seconda parte dell'enunciato. □

Possiamo a punto dare le condizioni (geometriche) di appartenenza di un punto di $\mathbb{A}$ ad un m-piano S. A tal fine ricordiamo che il *rango* di r vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, è la dimensione del sottospazio $L[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r]$ da essi generato. In particolare, se $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, il rango di r vettori coincide con il rango della matrice che li ha per righe (come è comune in questo contesto) o (equivalentemente) per colonne (come è comune in algebra lineare). Denotiamo il rango di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ con $\mathbf{rg}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$.

Per la definizione stessa di m-piano: un punto P di $\mathbb{A}$ appartiene all'm-piano S passante per P_0 e di direzione W se e solo se, $\overrightarrow{P_0P} \in W$. Sicché, se $\{\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_m}\}$ è una base della direzione W, allora

$$P \in S \iff \overrightarrow{P_0P} \in W \iff \overrightarrow{P_0P} = t_1\overrightarrow{w_1} + \cdots + t_m\overrightarrow{w_m} \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_m}) = m.$$

In particolare si hanno le condizione di appartenenza di un un punto P ad

UNA RETTA r (DEL PIANO O DELLO SPAZIO ORDINARIO) PASSANTE PER P_0 E DI DIREZIONE $\overrightarrow{v}$:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{v}) = 1 \tag{6}$$

UNA RETTA r (DEL PIANO O DELLO SPAZIO ORDINARIO) PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI P_0 E P_1 OVVERO CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI P CON P_0 E P_1:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}) = 1 \tag{7}$$

UN PIANO π (DELLO SPAZIO ORDINARIO) PASSANTE PER P_0 E DI DIREZIONE $L[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$:

$$P \in \pi \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 2 \tag{8}$$

UN PIANO π (DELLO SPAZIO ORDINARIO) PASSANTE PER TRE PUNTI ASSEGNATI P_0, P_1 E P_2 OVVERO CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DI P CON P_0, P_1 E P_2:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) = 2. \tag{9}$$

5 Riferimenti Affini e Cartesiani

Un riferimento affine in un n-spazio $\mathbb{A}$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, \{\overrightarrow{b_1}, \dots \overrightarrow{b_n}\})$ dove O è un punto di $\mathbb{A}$ detto *origine del riferimento* (o semplicemente *origine*) mentre $\{\overrightarrow{b_1}, \dots \overrightarrow{b_n}\}$ è una base dello spazio vettoriale $V(\mathbb{A})$. Un riferimento cartesiano $\mathcal{C}$ è un riferimento affine in cui la base $\{\overrightarrow{b_1}, \dots \overrightarrow{b_n}\}$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $V(\mathbb{A})$. Le rette di equazioni parametriche $O + t\overrightarrow{b_i}$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono *gli assi del riferimento* oppure, quando il riferimento sia cartesiano, *gli assi cartesiani.* I piani di equazioni parametriche $O + s\overrightarrow{b_i} + t\overrightarrow{b_j}$, $s, t \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, si dicono *piani coordinati.* Nel seguito ci limiteremo solo a riferimenti cartesiani sebbene tutte le considerazioni che non coinvolgano la struttura euclidea di $V(\mathbb{A})$ rimangono valide anche nel contesto più generale dei riferimenti affini.

L'introduzione di un riferimento $\mathcal{C}$ in un n-spazio $\mathbb{A}$ (retta, piano o spazio ordinari) consente di identificare ogni punto $P \in \mathbb{A}$ con una n-upla ordinata di numeri reali $(x_1, \dots, x_n)$[4] dette le *coordinate di P nel riferimento $\mathcal{C}$*. Per definizione le coordinate di P nel riferimento sono le coordinate del vettore geometrico $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\{\overrightarrow{b_1}, \dots \overrightarrow{b_n}\}$ di $V(\mathbb{A})$:

$$P \text{ ha coordinate } (x_1, \dots, x_n) \text{ in } \mathcal{C} \iff \overrightarrow{OP} = x_1\overrightarrow{b_1} + \dots + x_n\overrightarrow{b_n}. \tag{10}$$

Equivalentemente:

$$P \text{ ha coordinate } (x_1, \dots, x_n) \text{ in } \mathcal{C} \iff P = O + x_1\overrightarrow{b_1} + \dots + x_n\overrightarrow{b_n}. \tag{11}$$

Le precedenti (10) e (11) realizzano una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'n-spazio $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{R}^n$. Va osservato tuttavia che $\mathbb{R}^n$ contiene immagini di oggetti diversi: le coordinate dei punti di $\mathbb{A}$ e le coordinate dei vettori di $V(\mathbb{A})$ rispetto alla base di $\mathcal{C}$. Precisiamo meglio quanto detto considerando il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{R}^n \\ V(\mathbb{A}) \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \tag{12}$$

nel quale

- $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$ è la biiezione tra punti di P e n-uple delle loro coordinate in $\mathcal{C}$; α dipende dal riferimento $\mathcal{C}$
- $\beta : \mathbb{A} \to V(\mathbb{A})$ è la biiezione tra punti di P e vettori di $V(\mathbb{A})$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ l'unico vettore $\overrightarrow{v}$ tale che $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$; pertanto, attraverso β, i punti di $\mathbb{A}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli estremi finali dei vettori geometrici tutti applicati nell'origine O; β dipende dunque dalla scelta di un punto di $\mathbb{A}$ come origine (quella di $\mathcal{C}$, ad esempio);
- $\gamma : V(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}^n$ è l'isomorfismo standard tra uno spazio vettoriale di dimensione finita ed $\mathbb{R}^n$ che associa vettori di $V(\mathbb{A})$ alla n-upla delle loro coordinate rispetto ad una base data; γ dipende pertanto dalla base prescelta in $V(\mathbb{A})$ (quella di $\mathcal{C}$, ad esempio).

[4] L'uso corrente in questo contesto è quello di rappresentare le coordinate come vettori riga.

Sappiamo dall'algebra lineare che gli isomorfismi di spazi vettoriali sono applicazioni lineari. Pertanto possiamo dire che, se il vettore $\overrightarrow{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}$, allora le coordinate di $\overrightarrow{v}$ sono date dalla combinazione lineare delle coordinate dei $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}$ con gli stessi coefficienti. Inoltre l'isomorfismo conserva la dimensione dei sottospazi di $V(\mathbb{A})$ e quindi il rango di insiemi di vettori. Per esempio, se $\mathbf{rg}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}) = s$ allora, per i vettori delle loro coordinate, risulta $\mathbf{rg}(\gamma(\overrightarrow{v_1}), \dots, \gamma(\overrightarrow{v_r})) = s$. Utilizziamo queste osservazioni per calcolare le coordinate del vettore $\overrightarrow{v}$ applicato in un punto diverso dall'origine.

Proposizione 1 (Coordinate di un vettore geometrico applicato in un punto diverso dall'origine). *Le coordinate del vettore* $\overrightarrow{QP}$ *sono date da*

$$(p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n) = (p_1, \dots, p_n) - (q_1, \dots, q_n)$$

dove $(q_1, \dots, q_n)$ *e* $(p_1, \dots, p_n)$ *sono le coordinate di* Q *e* P*, rispettivamente. Pertanto, se* $\overrightarrow{v}$ *è il vettore geometrico rappresentato da* (Q, P)*, le coordinate di* $\overrightarrow{v}$ *sono le coordinate di* $\overrightarrow{v}$ *rispetto a* $\mathcal{C}$ *quando è applicato nell'origine.*

Dimostrazione . Siccome $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ e siccome le coordinate di $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OP}$ coincidono con quelle di Q e P per costruzione, si ha quanto asserito. Resta solo da osservare che, per la regola del parallelogramma, il punto di coordinate $(p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n)$ è l'estremo finale di un segmento equipollente a (Q, P) applicato nell'origine. $\square$

Un paio di osservazioni sono a questo punto necessarie

I. Per la proposizione precedente, le coordinate di un vettore geometrico non dipendono dal punto di applicazione (o dal particolare rappresentante prescelto). In altre parole, le coordinate sono assegnate alla classe di equipollenza.

II. La scrittura formale $Q + \overrightarrow{v}$ usata per denotare l'estremo finale del vettore geometrico $\overrightarrow{v} \in V(\mathbb{A})$ applicato nel punto Q dell'n-spazio $\mathbb{A}$, ora si può interpretare come una vera e propria somma di n-uple di numeri reali (vettori di $\mathbb{R}^n$): se le coordinate di Q, P e $\overrightarrow{v}$ sono, rispettivamente, $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ e se $P = Q + \overrightarrow{v}$, allora $(p_1, p_2, \dots, p_n) = (q_1 + v_1, q_2 + v_2, \dots, q_n + v_n)$ e anche $(p_1 - q_1, p_2 - q_2, \dots, p_n - q_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dando così senso alla (1)[5]

L'isomorfismo γ tra $V(\mathbb{A})$ ed $\mathbb{R}^n$ nel diagramma (12) permette agevolmente di tradurre in maniera "algebrica" le condizioni (6)÷(7) di appartenenza di punti a rette e piani e di dipendenza di punti (allineamento e complanarità) e di riscrivere in coordinate le equazioni parametriche di rette e piani. Infine, come vedremo, permette di determinare le equazioni cartesiane di m-spazio (in modo analogo alle equazioni cartesiane di sottospazio). Discutiamo ciascuna di queste conseguenze in una sezione dedicata premettendo la notazione che utilizzeremo nel seguito.

Notazione. D'ora in avanti assumeremo che $\mathbb{A}$ sia il piano o lo spazio ordinario e che in $\mathbb{A}$ sia stato introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{C}$. Le coordinate in $\mathcal{C}$ del generico punto P di $\mathbb{A}$ sono (x, y) se $\mathbb{A}$ è il piano ordinario e (x, y, z) se $\mathbb{A}$ è lo spazio ordinario. Analogamente, (x_i, y_i)

[5] Si noti che ciò è possibile perché, come si dice, il Diagramma (12) è commutativo, vale cioè $\alpha(Q) = \gamma(\beta(Q))$ per ogni punto $Q \in \mathbb{A}$. in altre parole: le immagini tramite α coincidono con le immagini ottenute applicando prima β e poi γ. Si ha dunque $\alpha(Q) = \gamma(\beta(Q)) = \gamma(\overrightarrow{OQ})$ sicché le coordinate di $Q + \overrightarrow{v}$ si calcolano come $\alpha(Q) + \gamma(\overrightarrow{v}) = \gamma(\overrightarrow{OQ}) + \gamma(\overrightarrow{v}) = \gamma(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{v})$.

e (x_i, y_i, z_i) sono le coordinate di P_i per $i = 0, 1, 2$. Le coordinate dei vettori che generano la direzione di una retta o di un piano si denotano generalmente con (l, m) e (l, m, n) (e loro varianti apiciate) a seconda che $\mathbb{A}$ sia il piano o lo spazio ordinario. Le coordinate della direzione $\overrightarrow{v}$ di una retta r sono note come *parametri direttori* di r ed è chiaro che tali parametri sono dati a meno di un coefficiente di proporzionalità.

5.1 Equazioni parametriche di retta e piano

Per quanto visto in **II**, le due seguenti espressioni

$$P = P_0 + t_1\overrightarrow{w_1} + \cdots + t_m\overrightarrow{w_m}$$

e

$$P = P_0 + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + t_2\overrightarrow{P_0P_2} + \cdots + t_m\overrightarrow{P_0P_m}$$

che descrivono, rispettivamente, il generico punto P dell'm-piano passante per P_0 e di direzione $L[\overrightarrow{w_1} + \cdots + \overrightarrow{w_m}]$ e il generico punto P dell'm-piano passante per per gli $m+1$ punti (indipendenti) $P_0, P_1 \ldots, P_m$, valgono per le coordinate dei loro termini e si traducono pertanto in equazioni lineari. Tali equazioni (nelle coordinate dei termini) sono ancora dette *equazioni parametriche dell'm-piano S passante per P_0 e di direzione $L[\overrightarrow{w_1} + \cdots + \overrightarrow{w_m}]$, e passante per per gli $m+1$ punti (indipendenti) $P_0, P_1 \ldots, P_m$*, rispettivamente. Scriviamole esplicitamente per $1 \leq m \leq n-1 \leq 2$ (si tratta dunque di rette del piano ordinario o di rette e piani nello spazio ordinario).

5.1.1 Equazioni parametriche della retta

Siano

$$r = \{P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + t\overrightarrow{v}\}, \quad r' = \left\{P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1}\right\} \tag{13}$$

la retta r passante per P_0 e di direzione $\overrightarrow{v}$ assegnata e la retta r' passante per due diversi punti assegnati P_0 e P_1 e dove $\mathbb{A}$ è il piano ordinario o lo spazio ordinario. Allora si hanno le seguenti equazioni:

nel piano ordinario:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad r' : \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Nello spazio ordinario:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Si noti che è stato utilizzato il simbolo ":" anziché il simbolo "=" per enfatizzare il fatto che r o r' non coincidono con gli insiemi delle soluzioni delle equazioni alla loro destra bensì che tali insiemi di soluzioni danno le coordinate dei punti di r o r'.

5.1.2 Equazioni parametriche del piano

Analogamente al caso della retta, siano

$$\pi = \{P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + s\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w}\}, \quad \pi' = \left\{P \in \mathbb{A} \mid P = P_0 + s\overrightarrow{P_0P_1} + t\overrightarrow{P_0P_2}\right\}$$

il piano π passante per P_0 e di assegnata direzione $L[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ (o in modo equivalente, π parallelo a $\overrightarrow{v}$ e a $\overrightarrow{w}$) e il piano π' passante per i tre punti non allineati assegnati P_0 e P_1, P_2 e dove $\mathbb{A}$ è lo spazio ordinario. Come sopra, le coordinate in $\mathcal{C}$ del generico punto P di π siano (x, y, z) e (x_i, y_i, z_i) siano le coordinate di P_i per $i = 0, 1, 2$ e siano (l, m, n) e (l', m', n') le coordinate di $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, rispettivamente. Si hanno allora le seguenti equazioni:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + sl + tl' \\ y = y_0 + sm + tm' \\ z = z_0 + sn + tn' \end{cases} s,\, t \in \mathbb{R} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + s(y_1 - y_0) + t(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + s(z_1 - z_0) + t(z_2 - z_0) \end{cases} s,\, t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

5.2 Allineamento e complanarità di punti

Le condizioni (6)÷(7) di appartenenza di punti a rette e piani e di dipendenza di punti (allineamento e complanarità) si possono ora riscrivere in coordinate sicché la nozione (geometrica) di rango di un certo numero di vettori geometrici si esprime attraverso la ben nota nozione di rango di una matrice che ha per righe le coordinate di quei vettori. si hanno le condizione di appartenenza di un un punto P ad

UNA RETTA r DEL PIANO ORDINARIO PASSANTE PER P_0 E DI DIREZIONE $\overrightarrow{v}$:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{v}) = 1 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = 1 \tag{17}$$

UNA RETTA r DELLO SPAZIO ORDINARIO PASSANTE PER P_0 E DI DIREZIONE $\overrightarrow{v}$:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{w}) = 1 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1 \tag{18}$$

UNA RETTA r DEL PIANO ORDINARIO PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI P_0 E P_1 OVVERO CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI P CON P_0 E P_1:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}) = 1 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 1 \tag{19}$$

UNA RETTA r DELLO SPAZIO ORDINARIO PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI P_0 E P_1 OVVERO CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI P CON P_0 E P_1:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}) = 1 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} = 1 \tag{20}$$

UN PIANO π (DELLO SPAZIO ORDINARIO) PASSANTE PER P_0 E DI DIREZIONE $L[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$:

$$P \in \pi \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 2 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2 \tag{21}$$

un piano π dello spazio ordinario passante per tre punti assegnati P_0, P_1 e P_2 ovvero condizione di complanarità di P con P_0, P_1 e P_2:

$$P \in r \iff \mathbf{rg}(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) = 2 \iff \mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 2. \tag{22}$$

5.3 Equazioni cartesiane di rette e piani

Ci è noto dall'algebra lineare che ogni sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale V di dimensione n, ammette equazioni cartesiane; esiste cioè un sistema di $n - m$ equazioni lineari omogenee indipendenti in n incognite che sono soddisfatte dalle coordinate di tutti e soli i vettori di W prese rispetto ad una base di V. Viceversa, l'insieme delle soluzioni di ogni sistema lineare omogeneo di $n - m$ equazioni indipendenti in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Inoltre, fissata una base di V, tale sottospazio vettoriale è l'insieme delle coordinate di un sottospazio W di V. Gli m-piani sono in qualche senso sottospazi[6] di un n-spazio sicché non deve stupire che esista un sistema di $n-m$ equazioni lineari indipendenti che sono soddisfatte da tutte e sole le coordinate dei punti di un m-piano (prese rispetto a $\mathcal{C}$) e, viceversa, l'insieme delle soluzioni di un siffatto sistema è l'insieme delle coordinate dei punti di un qualche m-piano. Inoltre tali equazioni si determinano a partire dalle equazioni parametriche "eliminando il parametro" così come si fa per le equazioni cartesiane di sottospazio. La differenza sostanziale è che le equazioni che definiscono il sistema predetto non sono omogenee Precisiamo quanto detto nel teorema seguente.

Teorema 7 (Equazioni Cartesiane di m-piani)**.** *Sia S un m-piano in un n-spazio $\mathbb{A}$ nel quale sia stato introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{C}$. Esiste un sistema compatibile di $n-m$ equazioni indipendenti in n incognite tale che un punto P appartiene ad S se e solo se le coordinate di P rispetto a $\mathcal{C}$ sono soluzioni del sistema. Viceversa, fissato $\mathcal{C}$, le soluzioni di un sistema compatibile di $n - m$ equazioni indipendenti in n incognite sono le coordinate di tutti e soli punti di un qualche m-piano S in un n-spazio $\mathbb{A}$. Si dice in questo caso che* il sistema rappresenta un m-piano*.*

Piuttosto che dare la dimostrazione del teorema in generale, facciamo vedere come si determinano le equazioni cartesiane nei casi che ci interessano mostrando come si passa dalle equazione parametriche a quelle cartesiane (eliminazione del parametro) e viceversa (risolvendo il sistema). Osserviamo preliminarmente che

Per $(m = 1, n = 2)$ si ha una retta nel piano. Siccome $n - m = 1$, essa si rappresenta con un'equazione (compatibile) in due incognite. Viceversa, una siffatta equazione rappresenta sempre una retta del piano.

Per $(m = 1, n = 3)$ si ha una retta nello spazio. Siccome $n - m = 2$, essa si rappresenta con un sistema (compatibile) di due equazioni in tre incognite. Viceversa, una siffatto sistema rappresenta sempre una retta nello spazio

Per $(m = 2, n = 3)$ si ha un piano nello spazio. Siccome $n - m = 1$, esso si rappresenta con un'equazione (compatibile) in tre incognite. Viceversa, una siffatta equazione rappresenta sempre un piano dello spazio ordinario.

[6] Sono appunto sottospazi affini

La seguente proposizione è utile perché contribuisce a chiarire l'interpretazione geometrica[7] del teorema di Rouché-Capelli data nella seconda parte del Teorema 7.

Proposizione 2. *Sia* $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *e* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Sia*

$$\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}\}.$$

Se il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *è compatibile allora l'insieme delle sue soluzioni è*

$$\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \ker \mathbf{A}\}$$

dove $\mathbf{x}_0$ *è una soluzione particolare del sistema.*

Dimostrazione . Si noti preliminarmente che $\mathbf{0} \in \ker \mathbf{A}$ sicché $\ker \mathbf{A} \neq \emptyset$. Se il sistema è compatibile, allora esso ammette almeno una soluzione. Sia essa $\mathbf{x}_0$ e sia $\mathbf{y} \in \ker \mathbf{A}$. Allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

e dunque $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ è una soluzione del sistema. Abbiamo così provato che tutte le soluzioni che si ottengono sommando a $\mathbf{x}_0$ un elemento del nucleo di $\mathbf{A}$ sono soluzioni del sistema. Facciamo vedere viceversa che ogni altra soluzione del sistema ha questa forma. Sia dunque $\mathbf{z}$ un'altra qualsiasi soluzione del sistema. Allora $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}_0 \in \ker \mathbf{A}$ perché $\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ma $\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ sicché $\mathbf{z}$ è della forma richiesta. □

Osservazione 1. *Per il Teorema 7, le soluzioni di un sistema lineare sono le coordinate dei punti di un m-piano* S *(in un fissato riferimento* $\mathcal{C}$*). Per la proposizione precedente, tali coordinate (come vettori di* $\mathbb{R}^n$*) si ottengono traslando il sottospazio* $\ker \mathbf{A}$ *affinché contenga le coordinate* $\mathbf{x}_0$ *di un punto* P_0 *dell'm-piano* S.

Proposizione 3. *Con le notazioni della Proposizione 2, se il sistema* $\Sigma : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *è compatibile, allora l'm-piano* S *che esso rappresenta in virtù del Teorema 7, passa per il punto di coordinate* $\mathbf{x}_0$ *ed ha direzione costituita da tutti e soli i vettori geometrici che hanno per coordinate le soluzioni del sistema lineare omogeneo* $\Sigma_0 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *associato a* Σ. *Si dice anche che la direzione di* S *è* individuata *da* Σ_0. *Inoltre, se* $\{\mathbf{y}_1 \ldots, \mathbf{y}_m\}$ *è una base dello spazio delle soluzioni di* Σ_0 *(ossia una base di* $\ker \mathbf{A}$*), allora le equazioni parametriche di* S *sono appunto:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{y}_1 + \cdots + t_m\mathbf{y}_m$$

dove $\mathbf{x}$ *è il vettore (colonna) delle coordinate del generico punto di* S.

5.3.1 Equazioni cartesiane di una retta nel piano

Sia r una retta del piano ordinario passante per P_0 e direzione $\overrightarrow{v}$. Per la (17), le coordinate del generico punto P soddisfano

$$\mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = 1$$

[7] L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ a meno che il sistema non sia omogeneo. Esso è però sempre un sottospazio affine.

che equivale a

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo la prima riga si ottiene dunque l'equazione

$$m(x-x_0) - l(y-y_0) = 0 \tag{23}$$

che è soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti di r. Svolgendo i prodotti, dopo aver posto $a = m$, $b = -l$ e $c = -mx_0 + ly_0$, si ottiene l'equazione

$$ax + by + c = 0. \tag{24}$$

detta *equazione cartesiana della retta nel piano*. Si noti che l'equazione è compatibile certamente perché $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. In particolare, almeno uno tra a e b è non nullo. Viceversa, se la (24) è compatibile, allora, risolvendo il sistema, si vede che (per la Proposizione 2) le soluzioni sono dell'equazione sono della forma $(x_0, y_0) + t(-b, a)$ dove (x_0, y_0) è una soluzione particolare dell'equazione e $(-b, a)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata $ax + by = 0$. Ovviamente si tratta dell'equazione parametrica (in coordinate) di una retta del piano.

5.3.2 Equazioni cartesiane di una retta nello spazio

Sia r una retta dello spazio ordinario passante per P_0 e direzione $\overrightarrow{v}$. Per la (18), le coordinate del generico punto P soddisfano

$$\mathbf{rg}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1.$$

Siccome la matrice ha rango pari a 1, esiste un'entrata non nulla (un minore di ordine 1 non singolare) e ogni minore di ordine 2 ha determinante nullo. Poiché $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, almeno uno tra l, m ed n è non nullo. Per il Teorema degli Orlati, affinché la matrice abbia rango 1 è necessario e sufficiente che i due minori che si ottengono orlando il minore di ordine 1 prescelto, siano singolari. L'annullarsi di tali due minori si esprime mediante un sistema di due equazioni indipendenti in tre incognite. Per esempio, se $l \neq 0$, allora si hanno le due equazioni lineari in tre incognite:

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ l & n \end{pmatrix} = 0.$$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} m(x-x_0) - l(y-y_0) = 0 \\ n(x-x_0) - l(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

Le precedenti due equazioni prendono il nome di equazioni *ridotte* perché ciascuna di esse contiene solo due delle tre incognite. D'altra parte, ogni sistema equivalente al precedente rappresenta la stessa retta. Dunque, in generale, concludiamo che ogni retta nello spazio si rappresenta con un sistema compatibile di due equazioni indipendenti in tre incognite del tipo:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{25}$$

detta *equazione cartesiana della retta nel piano.* Si noti che in tal modo, per il Teorema 7, ogni retta nello spazio si rappresenta mediante l'intersezione di due piani. Viceversa, se il sistema (25) è compatibile, allora, risolvendolo si vede che (per la Proposizione 2) le soluzioni dell'equazione sono della forma $(x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n)$ dove

$$l = \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad m = -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \quad n = \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \tag{26}$$

è una soluzione del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Ovviamente si tratta dell'equazione parametrica (in coordinate) di una retta del piano.

Esercizio 1. *Si dimostri che le equazioni ridotte sono linearemente indipendenti.*

Esercizio 2. *Si provi che il vettore (l, m, n) le cui componenti sono definite in (26) è una soluzione del sistema (27). A tal fine si sviluppi il determinante secondo la prima di riga di ciascuna delle due matrici*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

e si osservi che tale determinante è nullo.

5.3.3 Equazioni cartesiane di un piano nello spazio

Sia π un piano dello spazio ordinario passante per P_0 e direzione $L[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$. Per la (21), le coordinate del generico punto P soddisfano

$$\mathbf{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2$$

che equivale a

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando secondo la prima riga si ottiene dunque l'equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{28}$$

dove

$$a = \det\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} \quad b = -\det\begin{pmatrix} l & n \\ l' & n' \end{pmatrix} \quad c = \det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Tale equazione è soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti di π. Svolgendo i prodotti ed isolando il termine costante, si ottiene l'equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{30}$$

detta *equazione cartesiana del piano nello spazio*. La compatibilità è garantita dal fatto che almeno uno tra a, b e c è non nullo a causa dell'indipendenza lineare dei vettori $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. I coefficienti delle indeterminate nell'equazione cartesiana del piano prendono il nome di *parametri di giacitura*. Viceversa, se l'equazione (30) è compatibile, allora l'equazione omogenea associata

$$ax + by + cz = 0$$

ammette due soluzioni linearmente indipendenti (l, m, n) ed $(l'm', n')$ sicché, per la Proposizione 2, se (x_0, y_0, z_0) è una soluzione particolare di (30), allora tutte le soluzioni di (30) sono della forma

$$(x_0, y_0, z_0) + s(l, m, n) + t(l'm', n').$$

Ovviamente si tratta dell'equazione parametrica (in coordinate) di un piano nello spazio.

5.4 Equazioni cartesiane di retta e piano mediante il passaggio per punti

Come esercizio lasciamo al lettore il compito di verificare che

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

sono, rispettivamente, l'equazione cartesiana della retta nel piano ordinario passante per i punti (non coincidenti) P_0 e P_1 e l'equazione cartesiana del piano nello spazio ordinario passante per i punti (non allineati) P_0, P_1 e P_2. Il lettore verifichi infine che, per esempio nel caso di un piano nello spazio ordinario, note le coordinate di suoi tre punti non allineati, P_0, P_1 e P_2, i parametri a, b, c e d di una sua sua equazione cartesiana si determinano risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_0 a + y_0 b + z_0 c + d = 0 \\ x_1 a + y_1 b + z_1 c + d = 0 \\ x_2 a + y_2 b + z_2 c + d = 0 \end{cases}$$

di tre equazioni nella quattro incognite a, b, c e d. Si deduca che il sistema è compatibile e che la matrice dei coefficienti ha rango 3 utilizzando il fatto che P_0, P_1 e P_2 sono non allineati. Si spieghi come si interpreta il fatto che lo spazio delle soluzioni abbia dimensione 1.

6 Posizioni reciproche degli enti fondamentali

In questa sezione studiamo le posizioni che assumono i.reciprocamente gli enti fondamentali. Parleremo dunque di parallelismo, di incidenza e, quando possibile, della possibilità di non essere né paralleli né incidenti.

Definizione 6 (PARALLELISMO). *Sia S un m-piano di direzione W ed S' un m'-piano di direzione W' con m ed m' entrambi positivi. Diciamo che S ed S' sono paralleli e scriviamo $S \parallel S'$ se o $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$.*

Osserviamo subito che se $m = m'$ allora S ed S' sono paralleli se e solo se $W = W'$. In particolare, se $S = S'$, allora S ed S' sono paralleli. Si ha dunque:

- due rette (nel piano o nello spazio ordinario) sono parallele se hanno la stessa direzione. In particolare, due rette sono parallele se coincidono.

- due piani (nello spazio ordinario) sono paralleli se hanno la stessa direzione. In particolare, due piani sono paralleli se coincidono.

- Una retta r di direzione $\overrightarrow{v}$ dello spazio ordinario e un piano π di direzione W nello spazio ordinario sono paralleli se e solo se $\overrightarrow{v} \in W$. In particolare, se $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ è una base della direzione di π allora $r \parallel \pi$ se e solo se $\overrightarrow{v} = s\overrightarrow{w_1} + t\overrightarrow{w_2}$ per un certi $s, t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 4. *Siano S un m-piano di direzione W ed S' un m'-piano di direzione W' in un n-spazio $\mathbb{A}$. Supponiamo che $S \parallel S'$ e che $m \leq m'$. Se S ed S' hanno un punto in comune, allora $S \subseteq S'$. Se S ed S' hanno un punto in comune e $m = m'$, allora $S = S'$. Infine, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, e per ogni m-piano S di $\mathbb{A}$, esiste un unico m-piano S' passante per P e parallelo ad S.*

Dimostrazione . Sia $Q \in S \cap S'$. Dalla definizione stessa di m-piano risulta $P \in S \Rightarrow \overrightarrow{QP} \in W \subseteq W'$. Sicché $P \in S \Rightarrow \overrightarrow{QP} \in W'$ e cioè $P \in S'$. Pertanto $S \subseteq S'$. Se $m = m'$ allora si può scambiare il ruolo di S ed S' in quanto appena dimostrato sicché, valendo la doppia inclusione, $S = S'$. Infine, sia $P \in af$. Se $P \in S$ allora ogni m-piano S' passante per P e parallelo ad S deve coincidere con S per quanto abbiamo appena visto. Se $P \notin S$ allora esiste un unico m-piano passante per P e di direzione W. □

Definizione 7 (incidenza)**.** *Siano S un m-piano ed S' un m'-piano. Diciamo che S ed S' sono* incidenti *se essi hanno almeno un punto in comune.*

Dalla Proposizione 4 deduciamo che:

- due rette parallele ed incidenti sono coincidenti;

- due piani paralleli e incidenti sono coincidenti;

- se una retta r ed un piano π sono paralleli ed incidenti allora r è contenuta in π.

6.1 Posizioni reciproche di due rette nel piano ordinario

Siano r ed r' due rette del piano ordinario. Allora le eventualità che si possono presentare per la loro reciproca posizione sono tutte e sole quelle elencate di seguito:

- r ed r' sono incidenti ma non coincidenti, nel qual caso si intersecano in un sol punto;

- r ed r' sono coincidenti;

- r ed r' sono parallele e disgiunte.

I tre casi si presentano, rispettivamente, se il sistema formato dalle due equazioni cartesiane che rappresentano rispettivamente r ed r' è: compatibile e ammette una e una soluzione, è compatibile e ammette infinite soluzioni, è incompatibile.

6.2 Posizioni reciproche di due piani nello spazio ordinario

Siano π ed π' due piani nello spazio ordinario. Allora le eventualità che si possono presentare per la loro reciproca posizione sono tutte e sole quelle elencate di seguito:

– π e π' sono incidenti ma non coincidenti, nel qual caso si intersecano in una retta.

– π e π' sono coincidenti;

– π e π' sono paralleli e disgiunti.

I tre casi si presentano, rispettivamente, se il sistema formato dalle due equazioni cartesiane che rappresentano rispettivamente π ed π' è: compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni, è incompatibile.

6.3 Posizioni reciproche di una retta e di un piano nello spazio ordinario

Siano r e π una retta ed un piano nello spazio ordinario. Allora le eventualità che si possono presentare per la loro reciproca posizione sono tutte e sole quelle elencate di seguito:

– r e π sono incidenti ma non coincidenti, nel qual caso si intersecano in un punto.

– r è contenuto in π;

– r e π sono paralleli e disgiunti.

I tre casi si presentano rispettivamente se il sistema formato da tre equazioni lineari (due equazioni cartesiane per r e una per π) è: compatibile e ammette una ed una sola soluzione, è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, è incompatibile.

6.4 Posizioni reciproche di due rette nello spazio ordinario

Siano r ed r' due rette dello spazio ordinario. Allora le posizioni che si possono presentare per la loro reciproca posizione non sono solo quelle che si presentano nel piano.

Definizione 8. *Siano r ed r' due rette dello spazio ordinario. Esse si dicono* complanari *se esiste un piano dello spazio che le contiene entrambe. Rette che non sono complanari sono dette* sghembe.

Se $r = r'$, allora r ed r' sono ovviamente complanari (ogni piano contenente r contiene pure r'). Se $r \parallel r'$ ma $r \cap r' = \emptyset$, allora sia $Q \in r$ e $P \in r'$. Sia inoltre $\overrightarrow{v}$ la direzione di r ed r'. Il piano π, passante per Q e di direzione $L[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{v}]$ passa sia per Q che per P ed è parallelo sia ad r che a r'. Pertanto π contiene entrambe le rette per la Proposizione 4. Se, infine r ed r' sono incidenti ma non coincidenti, esse si intersecano in punto Q. Allora se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sono le direzioni di r ed r', rispettivamente, il piano passante per Q e di direzione $L[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ contiene entrambe le rette ancora per la Proposizione 4. Viceversa, se due rette r ed r' sono complanari si può prendere il piano che le contiene entrambe come un modello del piano ordinario. Se vi si introduce un sistema di riferimento, le due rette sono rappresentate ciascuna da una equazione cartesiana in due indeterminate. Pertanto per r ed r' si danno le stesse possibilità che si danno per due rette del piano ordinario e cioè quelle appena elencate: incidenti in un solo punto, coincidenti o parallele e disgiunte. Abbiamo così stabilito che le eventualità che si possono presentare per reciproca posizione di r ed r' sono tutte e sole quelle elencate di seguito:

– r ed r' sono incidenti ma non coincidenti;

– r ed r' sono coincidenti;

– r ed r' sono parallele e disgiunte;

– r ed r' sono sghembe.

Proposizione 5 (Criterio di complanarità). *Siano r ed r' due rette dello spazio ordinario con direzioni $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ di coordinate (l, m, n) ed (l', m', n') rispettivamente. Allora r ed r' sono complanari se e solo se preso un punto $Q \in r$ di coordinate (q_1, q_2, q_3) ed un punto P di coordinate (p_1, p_2, p_3), risulta*

$$\det \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0.$$